目　　录

第一章　常返性判别法

§1. 对称随机徘徊

考虑一个质点沿 x 轴在整数值点 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 上运动，它每次向左或向右等间隔地跳一个单位. 如果它向左和向右跳的概率相等都是 $1/2$，那么我们把这个质点的运动称为直线上的对称随机徘徊.

质点能够到达的位置 $0, +1, -1, \cdots$ 称为状态.

我们来证明，从任意初始位置出发的质点，迟早总会到达任何一个可能状态的概率为 1. 由于所有状态显然都是同等可能的，因此，只需证明，从任意状态出发的质点将在某个时刻到达位置 0. 用 $\pi(x)$ 表示从点 x 出发到达 0 的概率，那么 $\pi(0)=1$，且根据全概率公式，对 $x \neq 0$ 有

$$\pi(x)=\frac{1}{2}\pi(x-1)+\frac{1}{2}\pi(x+1). \qquad (1)$$

考虑函数 $\pi(x)$ 的图象，其中 $x=0, 1, 2, \cdots k, \cdots$. (1) 式意味着这个图象中任意三个相邻点都在一条直线上. 因此，当 $x \geqslant 0$ 时，函数 $\pi(x)$ 图象上的所有点都在同一条直线上. 由于 $\pi(0)=1$，所以这条线是自点 $(0, 1)$ 出发的一条射线. 如果对某个正数 x，$\pi(x)$ 小于 1，那么这条直线就要和 x 轴相交，从而当 x 很大时，$\pi(x)$ 将是负的，但这是不可能的. 因此，对一切 $x \geqslant 0$ 有 $\pi(x)=1$. 利用随机徘徊的对称性可知，对 $x<0$, $\pi(x)=1$ 也成立. 这就证明了，从任一初始状态出发到达状态 0 的概率等于 1.

直线上随机徘徊的一个自然推广是 l 维整数值点格 H_l 上的随机徘徊. 这个点格是由形如

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_le_l$$

的点(向量)组成的,其中 $e_1, e_2, \cdots, e_l$ 是 l 维空间的一组正交基,坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 是任意整数. 当这些坐标中的一个坐标加上或减去 1, 而其它坐标保持不变, 就得到点 x 的 $2l$ 个邻点(例如,在二维的情形,点格中每点有四个邻点,左、右、上、下各一). 不管质点以前的位置如何, 它每经一步运动都以相等的概率 $1/2l$ 到达一个邻点.

对二维情形,和一维情形一样,可以证明, 从二维点格中任一点出发的质点到达其它任一点的概率为 1 (见本章后面的习题). 但对三维和更高维点格来说,下面将看到, 质点从一状态到达另一状态的概率小于 1, 但到达某一集合 B (而不是一个单点) 的概率可能等于 1, 也可能小于 1, 我们把这个概率记作 $\pi_B(x)$, 其中 x 是质点的初始状态. 如果对点格的所有点 x, 有 $\pi_B(x) = 1$, 称集 B 是常返的; 如果点格中至少有一点 x, 使 $\pi_B(x) < 1$, 那么称集 B 是非常返的. 这一章将给出一个判别法,以区分常返集与非常返集.

§2. 转 移 函 数

令 $X(0)$ 表示作随机徘徊的质点的初始位置, $X(n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) 表示 n 步后质点的位置.

一个与随机徘徊有关的事件 A 的概率当然依赖于此徘徊的初始状态 x. 我们把这个概率记作 $P_x\{A\}$, 用记号 $M_x\xi$ 表示随机变量 ξ 关于这个分布 P_x 的均值.

其次, 用 $p(n, x, y)$ 表示质点从位置 x 出发 n 步后到达位置 y 的概率,即

$$p(n, x, y) = P_x\{X(n) = y\}.$$

函数 $p(n, x, y)$ 是随机徘徊的一个重要特征，称它为**转移函数**. 显然，$p(0, x, x) = 1$; $p(0, x, y) = 0$, $x \neq y$. 同样显然地有[1] $\sum_y p(n, x, y) = 1$. 称量

$$\sum_{y \in B} p(n, x, y) = P_x\{X(n) \in B\}$$

为从 x 到 B 的 n 步转移概率，其中 B 是 l 维空间中的某一集合.

随机徘徊的一个重要性质(这对随机徘徊的分析很有用)是跳跃 $\xi_k = X(k) - X(k-1)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 相互独立，向量 ξ_k 有相同的分布，并且和质点的初始状态无关. 特别，任一个向量 ξ_k 取它的每一个值 $(\pm e_1, \cdots, \pm e_l)$ 的概率都相等. 利用这个事实，对于转移函数 $p(n, x, y)$ 我们给出一个积分表示.

我们用 $\theta(x)$ 表示在向量 e_k 上取值为 θ_k 的线性形式. 即，如果 $x = x_1e_1 + \cdots + x_le_l$，那么 $\theta(x) = \theta_1x_1 + \cdots \theta_lx_l$. 考虑函数

$$F(\theta) = \sum_y p(n, x, y)e^{i\theta(y)} = M_x e^{i\theta(X(n))}, \tag{2}$$

即随机向量 $X(n)$ 的特征函数. (事实上，在等式(2)中的级数仅有有限项不为零，因为在 n 步后质点可能到达的不同状态不会超过 $(2l)^n$ 个.)利用函数 $F(\theta)$ 较易表示转移函数 $p(n, x, y)$. 例如，令 θ 表示所有这样的线性形式 $\theta(z) = \theta_1z_1 + \cdots + \theta_lz_l$，其中系数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 的绝对值不超过 π，用 $e^{-i\theta(z)}$ (这里 z 是点格 H^l 中的一个点)乘等式(2)，然后在 θ 上积分，由于 y 和 z 都是整数值坐标的向量，于是有

1) 今后符号 $\sum_y$ 表示对点格 H^l 的所有点求和.

$$\int e^{i\theta(y)-i\theta(z)}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\theta_1(y_1-z_1)+\cdots+\theta_l(y_l-z_l)]}d\theta_1\cdots d\theta_l$$

$$= \prod_{k=1}^{l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_k(y_k-z_k)}d\theta_k$$

$$= \begin{cases}(2\pi)^l & \text{当 } y = z \text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } y \neq z \text{ 时.}\end{cases}$$

由此知

$$p(n, x, z) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_{\Omega} F(\theta)e^{-i\theta(z)}d\theta. \qquad (3)$$

下面求函数 $F(\theta)$. 由于

$$X(n) = X(0) + \sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

其中 ξ_k 是第 k 步的跳跃，于是有

$$F(\theta) = M_x e^{i\theta(X(n))} = M_x e^{i\theta(X(0))}\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta(\xi_k)}.$$

又因为 $X(0) = x$ 的概率为 1，而且 ξ_k 独立同分布，故有

$$F(\theta) = e^{i\theta(x)}\Phi^n(\theta), \qquad (4)$$

其中 $\Phi(\theta) = M_x e^{i\theta(\xi_1)}$，向量 ξ_1 取 $\pm e_1, \cdots \pm e_l$ 的每一个值的概率都是 $\frac{1}{2l}$，因此

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2l}\sum_{m=1}^{l}(e^{i\theta_m} + e^{-i\theta_m}) = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{l}\cos\theta_m. \qquad (5)$$

将(4)式代入(3)式并用 y 代替 z，就得到

$$p(n, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^l}\int_{\Omega} e^{i\theta(x-y)}\Phi^n(\theta)d\theta. \qquad (6)$$

§3. 当 $n\to\infty$ 时质点轨道的状况

在本节假定 $l \geq 3$，我们来证明，当 $n \to \infty$ 时向量 $X(n)$

的长度概率为 1 地趋于无穷．下面将看到：由此导致任何有界集的非常返性．

假设我们作了一系列试验，其中第 n 次试验成功的概率为 p_n，于是和 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots$ 表示成功次数的均值（事实上，成功次数 η 等于和 $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n + \cdots$，其中如果第 n 次试验成功，那么 $\eta_n = 1$，否则 $\eta_n = 0$）．

考虑一个从点 x 出发的随机徘徊，当 $X(n) = y$ 时认为第 n 次试验成功．于是 $p_n = p(n, x, y)$，而和

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, x, y) \tag{7}$$

表示**到达点** y **的次数的均值**，我们来证明

$$g(x, y) < \infty. \tag{8}$$

（可以证明，在一维和二维情形时，对任意 x，y，有 $g(x, y) = \infty$（见习题）．）

由(5)式所定义的函数 $\Phi(\theta)$ 是连续的，并且 $\Phi(\theta)$ 在点 $(0, \cdots, 0)$ 与形如 $(\pm\pi, \cdots, \pm\pi)$ 的 2^l 个点上满足 $|\Phi(\theta)| = 1$，而在 Q 的其它点上满足 $|\Phi(\theta)| < 1$．因此，根据(6)式，有

$$\begin{aligned}(2\pi)^l g(x, y) &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_Q |\Phi^n(\theta)|\, d\theta \\ &= \int_Q \frac{d\theta}{1 - |\Phi(\theta)|}.\end{aligned} \tag{9}$$

因为当 $\alpha \to 0$ 时，$\cos\alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2}$，所以存在点 $0 = (0, \cdots, 0)$ 的一个邻域 U，使得 U 中的点 θ 满足

$$0 < \cos\theta_m \leqslant 1 - \frac{\theta_m^2}{4} \quad (m = 1, \cdots, l),$$

再由(5)式知

$$|\Phi(\theta)| = \Phi(\theta) < 1 - \frac{1}{4l}(\theta_1^2 + \cdots + \theta_l^2),$$

因此，对 $l \geqslant 3$ 有

$$\int_U \frac{d\theta}{1-|\Phi(\theta)|} < \int_U \frac{4l d\theta}{\theta_1^2 + \cdots + \theta_l^2} < \infty.$$

类似地，在 $\theta = (\pm\pi, \cdots, \pm\pi)$ 的邻域中也可验证积分(9)的收敛性，故

$$\int_Q \frac{d\theta}{1-|\Phi(\theta)|} < \infty, \tag{10}$$

这就证明了不等式(8).

由这个不等式可知，质点到达位置 y 只有限次的概率为 1. 因此，质点占据点格中任意给定的一个位置仅仅有限次数的概率为 1. 因为可列个概率为 1 的事件的交仍是一个概率为 1 的事件，所以质点不可能无穷多次占据一个单点的概率为 1. 因此，对于点格中的任一有界集，以概率 1 存在这样的时刻，在这时刻以后质点将不再返回该集.

现在不难证明任意有界集 B 是非常返的. 首先我们假定集 B 是常返的. 于是根据全概率公式（对任意的初始状态 x 和任意的 n）事件 $A_n = \{$质点在第 n 步后到达 $B\}$ 的概率为

$$\sum_y p(n, x, y)\pi_B(y) = \sum_y p(n, x, y) = 1.$$

因此，所有事件 A_n 都发生的概率为 1，即不论时间有多长质点都会到达 B，这与质点在某个时刻之后将离开 B 的概率为 1 这一事实相矛盾.

由(9)和(10)式可知，级数

$$e^{i(\theta, x-y)}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi^n(\theta)$$

可以在 Q 上逐项积分，因此，

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q e^{i\theta(x-y)} \Phi^n(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^l} \int_Q \frac{e^{i\theta(x-y)}}{1 - \Phi(\theta)} d\theta, \qquad (11)$$

最后的式子使我们可以对函数 $g(x, y)$（当 $l \geqslant 3$ 时）给出一个渐近估计，即

$$g(x, y) \sim \frac{c_l}{\|x - y\|^{l-2}}, \quad 当 \|x - y\| \to \infty, \qquad (12)$$

其中 $\|x\|$ 表示向量 x 的长度，c_l 是某个正数（见附录中的§1）。下面推导常返的判别法时将要用到这个估计。

§4. 调 和 函 数

设 $f(x)$ 是点格 H^l 上的函数，令

$$Pf(x) = M_x f(X(1)) = \sum_y p(1, x, y) f(y). \qquad (13)$$

很自然地，可称 P 为函数 $f(x)$ 的（一步）推移算子。

由于 $p(1, x, x + e_k) = \frac{1}{2l}$，于是 P 也是平均算子

$$Pf(x) = \frac{1}{2l} \sum f(x + e_k)$$

（其中对 k 求和，k 取 $\pm 1, \cdots, \pm l$，且 $e_{-k} = -e_k$）。很久以前人们就指出线性算子

$$A = P - E$$

是算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 的离散类似，其中 P 是平均算子，E 是单位算子，而 Δ 是 Laplace 算子，即

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}.$$

众所周知，对定义在全空间上充分光滑的函数 $f(x)$，有

$$\Delta f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum f(x+he_k) - 2lf(x)}{h^2},$$

也就是说，把点格无限细分，通过取极限，可以由算子 $P-E$ 得到 Laplace 算子.

算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 和 A 之间的类似有着很深远的意义，由于这种类似性，我们可以把随机徘徊中的许多概念用微分方程理论中相应的术语来描述.

称点格 H^l 上的函数 $f(x)$ 是调和的，如果 $Af(x)=0$；称函数 $f(x)$ 是上调和的，如果对一切 x 有 $Af(x)\leqslant 0$. 换句话说，如果 $Pf=f$，那么函数 f 是调和的；如果 $Pf\leqslant f$，那么函数 f 是上调和的.

显然，任一常数是调和函数. 我们来证明任一有界调和函数 f 是一常数.

如果函数 f 在某一点 y_0 达到它的极大值，那么证明是很容易的. 这时，设 $y_1, y_2, \cdots, y_{2l}$ 是点 y_0 的邻点，由 $Pf(y_0)=f(y_0)$ 知，数 $f(y_0)-f(y_k)$ 的算术平均值等于 0，又因为这些数是非负的，所以它们全等于 0. 因此，使得函数 f 取到极大值的点集，除了包含这些点外，还包含它们的邻点，显然，这样的函数是一常数.

对任一有界函数 φ，存在上确界 M. 一般来说，可能没有一个点能达到这个上确界，但是对任意 $\varepsilon>0$，一定存在一点 y，在这点 y 上有 $\varphi(y)\geqslant M-\varepsilon$. 这时，重复上一段讨论，不难证明，如果 φ 是调和的，那么在 y 的任一邻点 y' 上有不等式 $\varphi(y')\geqslant M-2l\varepsilon$. 因此，如果 $M>0$，我们可以取一连串点，y_0, $y_1=y_0+e_1, \cdots, y_n=y_{n-1}+e_1$，使得和

$$s=\varphi(y_0)+\varphi(y_1)+\cdots+\varphi(y_n)$$

大于任一预先指定的数 N.

现在设 f 是任意有界调和函数，于是函数 $\varphi(x)=f(x+e_1)-f(x)$ 也是有界调和函数，对它来说，和

$$s=f(y_n+e_1)-f(y_0)$$

不超过 f 的上界的两倍，因此，函数 φ 的上确界不能是正的。这意味着对任意 x，有

$$\varphi(x)=f(x+e_1)-f(x)\leqslant 0.$$

在上述讨论中，可以把向量 e_1 换成向量 $-e_1$，于是有

$$f(x+e_1)=f(x),$$

类似地可以证明，对任意 k 有 $f(x+e_k)=f(x)$.

调和函数的一个例子是函数 $\bar{\pi}_B(x)$，它是从 x 出发无穷次到达集合 B 的概率. 由于，

$$P\bar{\pi}_B(x)=\sum_y p(1,x,y)\bar{\pi}_B(y)$$

是从 x 出发一步之后再无穷次到达 B 的概率，显然，这个概率等于 $\bar{\pi}_B(x)$.

因为函数 $\bar{\pi}_B(x)$ 是有界的，所以根据上面的证明它是一个常数。我们来证明它或者等于 1 或者等于 0，这由集 B 是常返的还是非常返的来决定. 首先设集 B 是非常返的，我们用 $q(n,y)$ 表示从 x 出发在第 n 步首次到达 B 且到达的位置是 y 这一事件的概率，并且同前一样，用 $\pi_B(x)$ 表示从 x 出发到达 B 的概率，显然，有

$$\pi_B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in B}q(n,y).$$

为了使质点无穷多次到达 B，就必须使它在某一步第一次到达 B，然后再无穷多次到达 B。按照全概率公式计算这个事件的概率，就得到

$$\bar{\pi}_B = \pi_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{y \in S} q(n, y) \bar{\pi}_B(y)$$
$$= \bar{\pi}_B \cdot \pi_B(x), \tag{14}$$

其中 x 是点格的任一点. 因为 B 是非常返的，所以存在一 x，使得 $\pi_B(x) < 1$，因此，有 $\bar{\pi}_B = 0$.

其次设 B 是常返的，显然，对任意 $n \geqslant 0$ 和任意初始状态 x，事件 $C_n =$ {在第 n 步之后质点不再返回 B} 的概率等于 0，因此，

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\pi}_B(x) &= P_x\{\text{质点只有限次到达 } B\} \\ &= P_x\{C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots\} \\ &\leqslant P_x\{C_0\} + P_x\{C_1\} \\ &\quad + P_x\{C_2\} + \cdots = 0, \end{aligned}$$

即 $\bar{\pi}_B = 1$.

从而，我们可以给出常返的另一种定义. 集 B 是常返的，如果从点格的任一位置出发的质点无穷多次到达 B 的概率为 1，但是，如果对某个 x 这个概率小于 1，那么对所有 x 它都将等于 0，这时 B 是非常返的.

在结束这一节的时候，我们指出，不仅有界调和函数在整个点格 H^l 上是常数，而且有下界(或上界)的调和函数在整个点格 H^l 上也是常数(见习题). 没有上界和下界的调和函数类是相当广的. 例如向量 x 的坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 的任意线性函数满足方程 $Pf = f$，因而是调和函数.

§5. 位　　势

Laplace 算子 Δ 与 Newton 位势的概念紧密相关，假设一个物体的质量分布于三维空间 R^3 中，密度为 $\varphi(y)$，根据 Newton 的万有引力定律，这个物体对位于点 x 上单位质点

的作用力与函数

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^3} \frac{\varphi(y)dy}{\|x - y\|} \tag{15}$$

的梯度成正比，其中 $\|x - y\|$ 表示点 x 与 y 之间的距离，称函数 $f(x)$ 为分布 $\varphi(y)$ 的位势，这也可以解释为由一个电荷分布 φ 所产生的静电场的位势。

对函数 φ 给以适当的限制，位势 f 就是 Poisson 方程

$$\frac{1}{2}\Delta f(x) = -\varphi(x) \tag{16}$$

的解．完全类似地，在 l 维空间 $R^l(l \geqslant 3)$ 中，方程(16)的解是积分

$$f(x) = b_l\int_{R^l} \frac{\varphi(y)dy}{\|x - y\|^{l-2}}, \tag{17}$$

其中 b_l 是某个正的常数，称此积分为 l 维空间中分布 φ 的位势。

在离散的情形，方程(16)变成方程

$$Af(x) = -\varphi(x), \tag{18}$$

其中 f 和 φ 是点格 H^l 上的函数，考虑算子

$$G\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + \cdots + P^n\varphi + \cdots, \tag{19}$$

其中 $\varphi \geqslant 0$．令

$$f = G\varphi, \tag{20}$$

根据(19)式，有

$$PG\varphi = G\varphi - \varphi,$$

因此

$$\begin{aligned} Af &= (P - E)f = (P - E)G\varphi \\ &= G\varphi - \varphi - G\varphi = -\varphi. \end{aligned}$$

这就是说，算子 G 类似于(17)式给出的积分算子，因此我们把函数 $G\varphi$ 当作函数 $\varphi(\varphi \geqslant 0)$ 的**位势**。

这个离散的位势有一个直接的概率解释．事实上，我们有

$$P^n\varphi(x)=\sum_y p(n,x,y)\varphi(y)=M_x\varphi(X(n)). \quad (21)$$

当 $n=0$ 时(21)式化简成 $\varphi(x)=\varphi(x)$，当 $n=1$ 时它化为算子 P 的定义(见(13)式)，对其它的 n 可以用归纳法证明(21)式.

根据全概率公式，有

$$p(n+1,x,y)=\sum_z p(1,x,z)p(n,z,y).$$

假设(21)式对 n 成立，于是有

$$\begin{aligned}M_x\varphi(X(n+1))&=\sum_y p(n+1,x,y)\varphi(y)\\&=\sum_z p(1,x,z)\left[\sum_y p(n,z,y)\varphi(y)\right]\\&=\sum_z p(1,x,z)[P^n\varphi(z)]=P^{n+1}\varphi(x),\end{aligned}$$

即(21)式对 $n+1$ 也成立.

由(21)式得到

$$G\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}M_x\varphi(X(n))=M_x\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(X(n)). \quad (22)$$

这个式子可以对位势给出如下重要的解释．设每次到达位置 y 有盈利 $\varphi(y)$，这时，$G\varphi(x)$ 是质点从 x 出发在随机徘徊时得到的平均盈利.

利用 §3 引进的记号

$$g(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,x,y),$$

可以把位势表达式改写成

$$G\varphi(x)=\sum_y g(x,y)\varphi(y) \tag{23}$$

的形式。在§3最后曾指出,对充分大的$\|x-y\|$,有

$$g(x,y)\sim\frac{c_l}{\|x-y\|^{l-2}}.$$

因此,对$\|x\|\to\infty$,当$\varphi(y)$只在有限多个点上不为0时,有

$$G\varphi(x)=\sum_y g(x,y)\varphi(y)\sim c_l\Sigma\frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^{l-2}}.$$

故对充分大的$\|x\|$,离散位势与Newton位势很相象。

下面证明,如果$f=G\varphi$且τ是质点首次到达集B的时间,那么

$$f(x)-M_x f(X(\tau))=M_x\sum_{k=0}^{\tau-1}\varphi(X(k)). \tag{24}$$

(如果质点永远不到达B,那么令$\tau=\infty$,$f(X(\tau))=0$)。

令

$$\begin{aligned}f(x)=G\varphi(x)=M_x[\varphi(X(0))+\varphi(X(1))\\+\cdots+\varphi(X(n-1))+\cdots].\end{aligned} \tag{25}$$

把质点运动的轨道分为在时间τ以前和在时间τ以后两部分,于是有

$$\begin{aligned}f(x)=M_x[\varphi(X(0))+\cdots+\varphi(X(\tau-1))]\\+M_x[\varphi(X(\tau))+\varphi(X(\tau+1))+\cdots].\end{aligned} \tag{26}$$

显然,(26)式中的第一项表示随机徘徊在到达B之前所得到的平均盈利,而第二项表示首次到达B后的平均盈利。为了从(26)式得到(24)式,只需验证

$$M_x[\varphi(X(\tau))+\varphi(X(\tau+1))+\cdots]=M_x f(X(\tau)).$$

利用概率$q(n,y)=P_x\{\tau=n,x(n)=y\}$,有

$$M_x\varphi(X(\tau+k))=\sum_{n,y}q(n,y)M_y\varphi(X(k)),$$

$$\sum_{n} q(n, y) = P_x\{X(\tau) = y\},$$

其中 n 从 0 到∞，而 y 从 B 中取值．故

$$M_x \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(X(\tau + k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n,y} q(n, y) M_y \varphi(X(k))$$

$$= \sum q(n, y) \sum_{k=0}^{\infty} M_y \varphi(X(k)) = \sum_{n,y} q(n, y) f(y)$$

$$= \sum_{y} f(y) P_x\{X(\tau) = y\} = M_x f(X(\tau)).$$

§6. 过 分 函 数

回忆一个函数 $f(x)(x \in H^l)$，如果满足 $Pf \leqslant f$，就称为上调和函数．非负上调和函数在马尔可夫过程理论中起着重要的作用，通常称为过分函数．

因为调和函数满足 $Pf = f$，所以非负调和函数是过分函数．另外，如果 $f = G\varphi(\varphi \geqslant 0)$，那么

$$f - Pf = (\varphi + P\varphi + P^2\varphi + \cdots)$$
$$- P(\varphi + P\varphi + P^2\varphi + \cdots) = \varphi > 0.$$

这表明，任何非负函数的位势是过分函数．

下面证明，任何一个过分函数等于一个非负调和函数与一个非负函数的位势之和（这个结果是微分方程中著名的 Riesz 定理的离散类似）．

设 f 是过分函数，令 $f - Pf = \varphi$，注意 $\varphi \geqslant 0$，于是，显然有

$$f = \varphi + P\varphi + \cdots + P^{n-1}\varphi + P^n f. \tag{27}$$

由估计

$$\varphi + P\varphi + \cdots + P^{n-1}\varphi = f - P^n f \leqslant f$$

得到

$$G\varphi = \varphi + P\varphi + \cdots + P^n\varphi + \cdots < \infty.$$

因此，(27) 式意味着 $h = \lim_{n\to\infty} P^n f$ 存在且有

$$f = G\varphi + h. \tag{28}$$

显然 $Ph = h$，故 h 是一个调和函数。

过分函数的一个例子是到达集 B 的概率 $\pi_B(x)$. 为此，我们考虑一系列事件

$$A_n = \{\text{在第 } n \text{ 步以后质点到达集 } B\}.$$

容易看出，$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$，注意到 $P_x\{A_0\} = \pi_B(x)$，根据(21)式，有

$$P_x\{A_n\} = \sum_y p(n, x, y)\pi_B(y) = P^n\pi_B(x). \tag{29}$$

特别地，有

$$P\pi_B(x) = P_x(A_1) \leqslant P_x(A_0) = \pi_B(x),$$

因此 $\pi_B(x)$ 是过分函数。

用(27)式来表示函数 $\pi_B(x)$，即

$$\pi_B(x) = G\varphi_B(x) + \bar{\pi}_B(x), \tag{30}$$

其中 $\bar{\pi}_B(x) = \lim_{n\to\infty} P^n\pi_B(x)$，$\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x)$.

由(29)式知 $\bar{\pi}_B(x) = \lim_{n\to\infty} P_x\{A_n\} = P_x\left\{\bigcap_n A_n\right\}$. 因此，$\bar{\pi}_B(x)$ 表示不论时间有多长质点都会到达 B 的概率，换句话说，$\bar{\pi}_B(x)$ 表示无穷多次到达 B 的概率。在 § 4 我们已经遇到过这个概率，那里证明了，如果 B 是非常返的，它恒为 0；如果 B 是常返的，它恒为 1，故对非常返集有

$$\pi_B(x) = G\varphi_B(x),$$

即概率 $\pi_B(x)$ 是一个非负函数 φ_B 的位势，再根据(29)式知，$\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x) = P_x\{A_0\} - P_x\{A_1\} = P_x\{A_0 \setminus A_1\}$ 是质点在初始瞬间位于集 B 中的 x 处，而第一步之后就不再

返回 B 的概率，显然，这个概率只有对 $x \in B$ 时才能不为 0．因此，在集 B 以外函数 $\varphi_B(x)$ 等于 0．

在(30)式中的第一项是有限多次到达 B 的概率，重复前一段的讨论，不难证明 $P^n\varphi_B(x) = P_x\{A_n \setminus A_{n+1}\}$． 故展开式

$$G\varphi_B = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \varphi_B$$

相当于把这个概率展开成在第 n 步最后一次到达 B 的概率之和．

从前一节末尾导出的关系式（24）显然可知，如果 $f = G\varphi(\varphi \geqslant 0)$ 并且 τ 是首次到达集 B 的时间，那么

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant f(x). \tag{31}$$

由(28)式可知，这个不等式对任意有界过分函数都成立(因为根据 § 4 的结果，一个有界调和函数 h 是常数)．下面我们将看到，函数 f 有界性的假设是多余的，并且不等式(31)对相当广泛一类时间 τ 也是满足的(见第三章 § 3)．(31)式使我们想起出现在过分函数定义中的不等式 $M_x f(X(1)) = Pf(x) \leqslant f(x)$，唯一不同的是，现在 τ 是一个随机时间．

§ 7． 容　　度

Newton 位势与容度概念紧密相关．在电学中，一个物体 B 的容度定义如下：考虑在 B 上正电荷的所有这样的分布 φ，它们在空间任意点上产生的位势不超过 1． 人们已经证明，在这些位势当中存在一个极大的，称它为平衡势，相应的电荷分布称为平衡态 φ，对应平衡态 φ 的总电荷

$$C(B) = \int_B \varphi(y)\, dy$$

称为物体 B 的容度．利用(17)式，可以把容度的定义推广到

l 维空间 ($l > 3$)，容度是 Laplace 方程理论中最基本的概念之一.

从离散的位势 $f = G\varphi$ 出发，对定义在点格 H^l 上的函数试给出类似的表述. 固定点格的一个子集 B，考虑函数类 K_B，它由全体如下的函数 φ 构成：$\varphi \geqslant 0$，在 B 外等于 0，而且 $G\varphi \leqslant 1$.

对于函数 $f = G\varphi(\varphi \in K_B)$，§ 5 的(24)式采取如下形式

$$f(x) = M_x f(X(\tau)), \tag{32}$$

其中 τ 是质点首次到达集 B 的时间，由不等式 $f \leqslant 1$ 可知，$M_x f(X(\tau)) \leqslant P_x\{\tau < \infty\} = \pi_B(x)$，因此，由(32)式可推出

$$f(x) \leqslant \pi_B(x). \tag{33}$$

如果集 B 是非常返的，那么如上节所述，$\pi_B = G\varphi_B$，其中 $\varphi_B = \pi_B - P\pi_B \in K_B$，故有理由称 π_B 为**平衡势**，称 φ_B 为**平衡态**，而集 B 的**容度**定义为

$$C(B) = \sum_y \varphi_B(y). \tag{34}$$

对常返集不可能有容度的概念，我们知道所有有限集都是非常返的.

下面我们叙述平衡态的一个特殊性质，它相当于 Newton 位势理论中的 Gauss 定理. 设集 B 是非常返的. 在此情况下，我们来证明，对任意函数 $\varphi \in K_B$，有

$$\sum_y \varphi(y) \leqslant \sum_y \varphi_B(y) = C(B). \tag{35}$$

量 $\sum_y \varphi(y)$ 很自然地称为分布 φ 的总负荷. 不等式(35)告诉我们，**一个非常返集 B 的容度可以定义为集中在 B 上使位势不超过 1 的最大总负荷.**

为证明(35)式，我们引进记号

$$(f_1, f_2) = \sum_{y \in B} f_1(y) f_2(y).$$

由随机徘徊的对称性，有 $p(n, x, y) = p(n, y, x)$. 因此 $g(x, y) = g(y, x)$，故

$$(Gf_1, f_2) = (f_1, Gf_2).$$

再由当 $x \in B$ 时 $\pi_B(x) = 1$，且当 $\varphi \in K_B$ 时 $G\varphi \leqslant 1$，于是我们得出

$$\sum_y \varphi(y) = (\varphi, \pi_B) = (\varphi, G\varphi_B)$$
$$= (G\varphi, \varphi_B) \leqslant (1, \varphi_B) = C(B).$$

§8. 常返判别法

这节对三维点格中的子集 B 的常返性给出一个充分必要条件，这个条件是用容度来描述的，而且无论在内容上还是在形式上，都与微分方程中的边界点正则性的 Wiener 判别法十分类似（例如见 [16]第四章，§4），读者不难将讨论推广到 $l > 3$ 的情形。

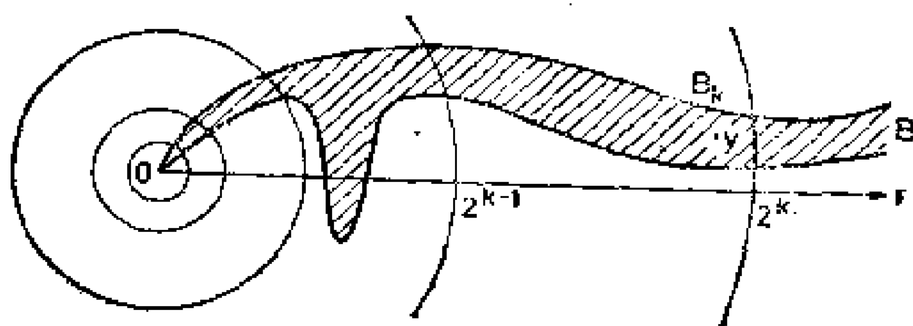


图 1

因为任何一个有界集都是非常返的，所以集 B 的常返性不依赖于集 B 在事先给定的球内的结构。由此可知，B 的常

返性依赖于 B 落在半径为 r 的球内之点数当 $r\to\infty$ 时增长的多快.

考虑一列球,它们以原点为中心,半径 $r=1, 2, 2^2, \cdots, 2^k, \cdots$ 形成一等比数列,用 B_k 表示集 B 落在第 k 个球与第 $k+1$ 个球之间的部分（更确切地说，B_k 是 B 中满足 $2^{k-1}<\|x\|<2^k$ 的 x 形成的集,见图 1).由于集 B_k 是有限的，对它可以定义容度 $C(B_k)$. 我们给出下面的判别法.

集 B 常返的充分必要条件是级数

$$\sum_k \frac{C(B_k)}{2^k} \tag{36}$$

发散.

我们先来证明条件的必要性，即证明，如果级数(36)收敛,那么集 B 是非常返的.

首先,由级数(36)收敛可推出级数

$$\sum_k \pi_{B_k}(0) \tag{37}$$

也收敛.

为了说明这一点,可借助于§3最后给出的渐近估计

$$g(x, y)\sim\frac{Q}{\|x-y\|}\quad(\|x-y\|\to\infty), \tag{38}$$

其中 $Q=c_3$(见 (12)式). 由(38)式可知，存在一个 $N>0$，使得对 $y\in B_k$, $k>N$, 有

$$g(0, y)\leqslant\frac{2Q}{\|y\|}. \tag{39}$$

因为 $\pi_{B_k}(x)$ 是集 B 的平衡势,所以有

$$\pi_{B_k}(0)=G\varphi_{B_k}(0)=\sum_y g(0, y)\varphi_{B_k}(y),$$

其中 φ_{B_k} 是集 B_k 上的平衡态. 利用估计(39)，φ_{B_k} 在 B_k 之外为 0，以及当 $y\in B_k$ 时 $\|y\|>2^{k-1}$，就得到

$$\pi_{B_k}(0) \leqslant \sum_y \frac{2Q\varphi_{B_k}(y)}{\|y\|} \leqslant \frac{Q}{2^{k-2}}$$

$$\cdot \sum_y \varphi_{B_k}(y) = 4Q\frac{C(B_k)}{2^k}.$$

从而级数(37)被级数(36)所控(相差一个常数)，所以它也收敛。

注意到，事件$\left\{\text{质点到达集 } \bar{B}_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right\}$就是事件{质点到达 B_k}，$k = n, n+1, \cdots$ 的并，于是

$$\pi_{\bar{B}_n}(0) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \pi_{B_k}(0).$$

因此，对充分大的 n，有 $\pi_{\bar{B}_n}(0) < 1$，故集 $\bar{B} = \bar{B}_n$ 是非常返的。由于有限集 $\bar{\bar{B}} = B\backslash\bar{B}$ 也是非常返的，所以我们只需证明两个非常返集的并也是非常返的。

为此，我们回忆常返的第二种定义，按照这个定义，如果质点有限次到达一个集的概率为 1，那么这个集是非常返的(见 §4)。又因为两个概率为 1 的事件的交仍是一个概率为 1 的事件，既然质点概率为 1 地有限次到达集 $\bar{B}$ 和 $\bar{\bar{B}}$，从而概率为 1 地有限次到达它们的并 $B = \bar{B}\cup\bar{\bar{B}}$。因此集 B 是非常返的。

常返条件的充分性是比较难证明的。假设级数(36)发散，我们把它分解成四个级数，每一个级数由级数(36)中的这样一些项组成，这些项的下标当用 4 除时所得的余数相同。这四个级数中至少有一个发散，为了确定起见，假定级数

$$\sum_k \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}} \tag{40}$$

发散。

用 S_k 表示点格中位于半径为 2^{4k-2} 和 $2^{4k-2}+1$的球所形

成的球层中的点集(即 H^l 中满足 $2^{4k-2} \leqslant \|y\| \leqslant 2^{4k-2}+1$ 的所有点 y 组成之集)(见图 2)。这时集 B_{4k} 被包含在 S_k 层与 S_{k+1} 层之间并且靠近 S_k 更胜于靠近 S_{k+1}。

因为质点在跳第一步时，它距坐标原点不能超过一个单位，所以质点不可能跳过 S_k 而不和它相交。由于质点跑到无穷远概率为 1，所以它就以概率为 1 地穿过包围初始状态 x 的所有 S_k 层。我们来研究事件 A_k，它表示质点从 S_k 层到 S_{k+1} 层的路程上到达集 B_{4k}(更确切地说，质点在首次到达 S_k 和首次到达 S_{k+1} 之间到达了集 B_{4k})。我们来证明，对充分大的 k，有

$$P_y\{A_k\} \geqslant Q_1 \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}, \quad (y \in S_k) \tag{41}$$

其中 $Q_1 > 0$ 与 y 和 k 都无关。

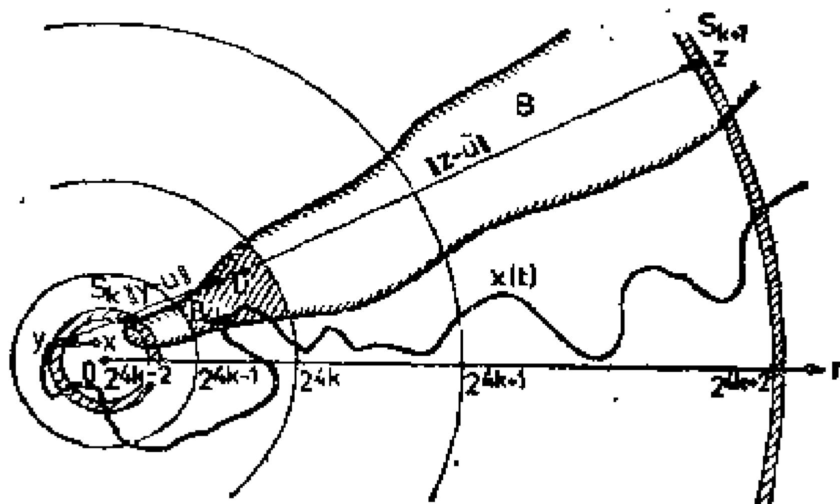


图 2

如果质点从 $y \in S_k$ 出发到达 B_{4k}，那么或者事件 A_k 发生，或者事件 $D_k = \{$质点在到达 S_{k+1} 层以后到达 $B_{4k}\}$ 发生。因此，有

$$\pi_{B_{4k}}(y) \leqslant P_y\{A_k\} + P_y\{D_k\}.$$

显然

$$P_y\{D_k\} \leqslant \max_{z \in S_{k+1}} \pi_{B_{4k}}(z)$$

(这个不等式可以用在时刻 n 首次到达 S_{k+1} 层内点 z 的概率 $q(n, z)$ 来证明，见 § 5 最后的讨论)。因此，

$$P_y\{A_k\} \geqslant \Pi_{B_{4k}}(y) - \max_{z \in S_{k+1}} \Pi_{B_{4k}}(z) \tag{42}$$

这里尚须计算函数 $\pi_{B_{4k}}$. 因为这个函数是平衡态 $\varphi_{B_{4k}}$ 的位势，而函数 $\varphi_{B_{4k}}$ 在 B_{4k} 外等于 0，且平衡态的总负荷等于容度 $C(B_{4k})$，所以由不等式 (42)，对 $y \in S_k$，有

$$P_y\{A_k\} \geqslant \sum_k g(y, u)\varphi_{B_{4k}}(u)$$

$$- \max_{z \in S_{k+1}} \sum_u g(z, u)\varphi_{B_{4k}}(u)$$

$$\geqslant C(B_{4k})\left[\min_{\substack{g \in S_k \\ u \in B_{4k}}} g(y, u) - \max_{\substack{z \in S_{k+1} \\ u \in B_{4k}}} g(z, u)\right].$$

利用渐近函数(38)，对充分大的 k 及 $y \in S_k$，有

$$P_y\{A_k\} \geqslant C(B_{4k})\left(\frac{5Q}{6r_k} - \frac{7Q}{6R_k}\right),$$

其中 r_k 是点 $g \in S_k$ 与 $u \in B_{4k}$ 之间的最大距离，而 R_k 是点 $z \in S_{k+1}$ 与 $u \in B_{4k}$ 之间的最短距离。由集 S_k，B_{4k} 和 S_{k+1} 的相对位置可知

$$r_k \leqslant 2^{4k-3} + 1 + 2^{4k} \leqslant 2 \cdot 2^{4k},$$

$$R_k \geqslant 2^{4k+2} - 2^{4k} = 3 \cdot 2^{4k}.$$

因此，对充分大的 k，有

$$P_y\{A_k\} \geqslant \frac{Q}{36} \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}} \quad (y \in S_k),$$

这就证明了不等式(41)。

有了不等式(41)，就不难证明集 B 的常返性。选定一个数 m，使得初始状态 x 位于 S_m 层中，并对一切 $k \geqslant m$，不等

式(41)成立. 用 τ_k 表示首次到达 S_k 层的时间，事件 A_k 的逆是 $\bar{A}_k=\{$在 $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ 期间质点没有到达 $B_{4k}\}$. 由估计式(41)可知，不管 τ_k 和 $x(\tau_k)$ 取什么值，也不管在时间 τ_k 之前质点如何运动，$\bar{A}_k$ 的概率总不会大于

$$1-Q_1\frac{C(B_{4k})}{2^{4k}},$$

因此，对任意 s，有

$$P_x\{\bar{A}_m\cap\bar{A}_{m+1}\cap\cdots\cap\bar{A}_{m+s}\}$$
$$\leqslant\prod_{k=m}^{m+s}\left(1-Q_1\frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}\right).$$

事实上，令

$$q_k(n, y)=P_x\{\tau_k=m, X(\tau_k)=y, \bar{A}_m\cap\cdots\cap\bar{A}_{k-1}\},$$

于是有

$$P_x\{\bar{A}_m\cap\cdots\cap\bar{A}_{k-1}\cap\bar{A}_k\}=\sum_{n,y}\varphi_k(n, y)P_y\{\bar{A}_k\}$$
$$\leqslant\left(1-Q_1\frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}\right)P_x\{\bar{A}_m\cap\cdots\cap\bar{A}_{k-1}\}.$$

令 $s\to\infty$，取极限，并且考虑到级数 $\sum Q_1\dfrac{C(B_{4k})}{2^{4k}}$ 发散，我们就推断出

$$P_x\{A_m\cup A_{m+1}\cup\cdots\cup A_{m+n}\cup\cdots\}$$
$$=1-P_x\{\bar{A}_m\cap\bar{A}_{m+1}\cap\cdots\cap\bar{A}_{m+n}\cap\cdots\}$$
$$=1.$$

这表明，质点概率为 1 地到达这些 B_{4k} 中的一个集，而这个集是属于 B 的，因此，集 B 一定是常返的.

§9. 位于坐标轴上的集合的常返性

利用前一节导出的常返判别法，试想象三维点格中的常

返集与非常返集是什么样子的.

显然,非常返集的任一子集仍是非常返的,而如果一个集包含了一个常返集,那么这个集也是常返的. 此外,任何有界集是非常返的.

用 $X_1(n)$, $X_2(n)$ 和 $X_3(n)$ 来表示点 $X(n)$ 的坐标. 我们来证明坐标平面 $x_3=0$ 是常返集. 显然, $X_3(n)$ 的值按照下面的规律变化: 在单位时间内它增加或减少一个单位的概率为 $\frac{1}{6}$, 而以 $\frac{2}{3}$ 的概率仍取原来的值. $X_3(n)$ 一连 k 次总取同一个值的概率是 $\left(\frac{2}{3}\right)^k$, 当 $k\to\infty$ 时,它趋于 0, 因此 $X_3(n)$ 的值迟早总要改变. 很明显, 从对称性考虑 $X_3(n)$ 的第一次增量取 $+1$ 或取 -1 的概率为 $\frac{1}{2}$. 因此, $X_3(n)$ 的随机变化规律与在 § 1 开始所描述的一维对称随机徘徊的差异仅仅在于质点可能在它所处的每一状态上有一段时间保持不动. 显然, 这样的等待时间不会改变质点到达 0 点的概率, 它只影响质点运动的速度, 而不改变质点轨道的路线. 由于在简单随机徘徊中, 从任何一个位置到达 0 点的概率都是 1, 所以 $X_3(n)$ 也将在某个时间到达 0 点. 因此, 坐标平面 $x_3=0$ 是常返集.

在二维对称随机徘徊中, 质点从任一位置到达 0 点的概率为 1 (见习题), 利用这一事实, 可以类似地证明坐标轴 $x_2=x_3=0$ 是常返集. 借助于 Wiener 判别法, 不仅能够证明这个相当简单的事实, 而且可以对形如 $(b_n, 0, 0)$ 点组成之集 B, 给出一个常返的判别法 (其中 b_n 都是整数, 且满足 $0<b_1<b_2<\cdots$).

如果级数 $\sum\frac{1}{b_n}$ 收敛, 那么集 B 是非常返的, 如果级数 $\sum\frac{1}{b_n}$ 发散且对充分大的 n, 有

$$b_{n+1} - b_n \geqslant c\log_2 b_n \quad (c\text{ 是一个正常数}) \tag{43}$$

那么集 B 是常返的.

集 B 的常返性与级数 $\sum \frac{1}{b_n}$ 的发散性之间的联系是完全合理的.因为这个级数发散意味着这些点 $(b_n, 0, 0)$ 都靠的很近，而级数收敛意味着 b_n 递增的很快. 条件(43)与证明中用来估计容度的方法有关[1)]，只当级数发散的很慢时，它才满足. 例如，如果 $b_n = [n\log_2 n]$（$[x]$ 表示 x 的整数部分），那么当 n 很大时，有

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &\geqslant (n+1)\log_2(n+1) - 1 - n\log_2 n \\ &\geqslant \log_2 n - 1 = \log_2 \frac{n}{2} \\ &\geqslant \log_2 \sqrt{n\log_2 n} \geqslant \frac{1}{2}\log_2 b_n \end{aligned}$$

且不等式(43)成立. 因此，$b_n = [n\log_2 n]$ 时，集 B 是常返的. 但如果 $b_n = [n\log_2^\alpha n]$，其中 $\alpha > 1$，那么级数 $\sum \frac{1}{b_n}$ 收敛，且 B 非常返.

假定级数 $\sum \frac{1}{b_n}$ 收敛.注意到，有限集的容度不超过这个

---

1) 条件(43)可以减弱为只要求有一个子列 b_{n_k}，使得 $\sum_k \frac{1}{b_{n_k}} = \infty$ 且对所有 k，有

$$b_{n_{k+1}} - b_{n_k} \geqslant c\log_2 b_{n_k}.$$

这时集 B 包含一个常返子集，因而它本身也是常返的. 自然会问，是否能从满足 $\sum_n \frac{1}{b_n} = \infty$ 的序列 b_n 中选出一子列 b_{n_k}，使它满足 $\sum_n \frac{1}{b_{n_k}} = \infty$ 与条件(43)呢？由 S.M. Gusein-zade 和 L. A. Ivanow 所给出的例子表明，这并不是永远可以作到的.

级数 $\sum_n \frac{1}{b_n}$ 发散是否是集 B 常返的充分条件呢？R.S.Bucy 在[17]中给出了一个例子否定了这一点. 但另一方面，在同一篇文章中他指出，可以用差 $b_{n+1} - b_n$ 递增的要求代替辅助条件(43).

集中元素的个数，这从容度的定义

$$C(B)=\sum_{x\in B}\varphi_B(x)$$

很容易看出，其中 φ_B 与概率一样不能大于 1. 我们来估计一下在常返判别法中所涉及到的集 B_k 中元素的个数。记这个数为 $|B_k|$. 如果 $b_n\in B_k$ ，那么 $2^{k-1}<b_n\leqslant 2^k$，因而 $\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{b_n}$. 把这不等式对给定的 B_k 中所有点求和，得到

$$\frac{|B_k|}{2^k}\leqslant\sum_{b_n\in B_n}\frac{1}{b_n},$$

因此

$$\frac{C(B_k)}{2}\leqslant\sum_{b_n\in B_k}\frac{1}{b_n}.$$

这就是说，级数(36)被级数 $\sum\frac{1}{b_n}$ 所控制，而它是收敛的，按照常返判别法，集 B 是非常返的.

现在假定级数 $\sum\frac{1}{b_n}$ 发散. 如果不等式(43)成立，我们来证明，对任意 x，有

$$\sum_{y\in B_k}g(x,y)\leqslant M, \tag{44}$$

其中M是某个固定常数. 利用这个不等式，可以得到 $C(B_k)$ 的一个下界. 考虑函数 $\varphi(y)$，对 $y\in B_k$ 它等于 $\frac{1}{M}$，而对其它点它等于 0，这函数的位势为

$$f(x)=\sum_y g(x,y)\varphi(y)=\frac{1}{M}\sum_{y\in B_k}g(x,y),$$

1) 今后为了简单起见，把 $(b_n,0,0)$ 写作 b_n，读者应该能区分什么时候 b_n 表示一个数，什么时候 b_n 表示点格 H^3 中的一个点.

再由(44)式可知，它不超过 1．回忆在 §7 最后给出的容度定义，容度是位势不超过 1 的最大总负荷，于是得到

$$C(B_k) \geqslant \sum_y \varphi(y) = \frac{|B_k|}{M},$$

如果 $b_n \in B_k$，那么 $2^{k-1} < b_n \leqslant 2^k$，从而有 $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{2^{k-1}}$，把这不等式对 $b_n \in B_k$ 求和，得到

$$\sum_{b_n \in B_k} \frac{1}{b_n} \leqslant \frac{|B_k|}{2^{k-1}} \leqslant 2M \frac{C(B_k)}{2^k},$$

故级数 $\sum \frac{1}{b_n}$ 被级数(36)所控制（差一个因子 $2M$）．由级数 $\sum \frac{1}{b_n}$ 发散知级数(36)也发散，即集 B 是常返的．

剩下的只是要证明不等式(44)．显然，我们可以假定 $k \geqslant 2$，借助于渐近估计(12)可知，存在某个数 Q 可作为 $g(x, y)$ 和 $\|x-y\| g(x, y)$ 的上界． 设 b_n 和 b_{n+1} 是集 B_k 最靠近 x 的两个点，且 b_{n-1}，b_{n-2}，$\cdots$，b_{n-i} 和 b_{n+2}，b_{n+3}，$\cdots$，b_{n+j} 是 B_k 中所有其它的点(图 3)

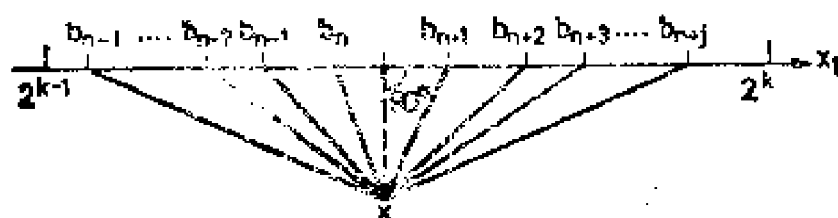


图 3

按照上述说明，有

$$\sum_{y \in B} g(x, y) \leqslant 2Q + Q\left(\frac{1}{\|x-b_{n-1}\|} + \frac{1}{\|x-b_{n-2}\|} + \cdots + \frac{1}{\|x-b_{n-i}\|}\right) + Q\left(\frac{1}{\|x-b_{n+2}\|}\right.$$

$$+\frac{1}{\|x-b_{n+3}\|}+\cdots+\frac{1}{\|x-b_{n+j}\|}\Bigg).$$

再由条件(43)可知，在集 B_k 的范围内，有

$$b_{l+1}-b_l \geqslant c\log_2 b_c \geqslant c\log_2 2^{k-1}=c(k-1).$$

因此（见图3），有

$$\begin{aligned}
&\|x-b_{n-1}\| \geqslant b_n-b_{n-1} \geqslant c(k-1),\\
&\|x-b_{n-2}\| \geqslant b_n-b_{n-2} \geqslant 2c(k-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\|x-b_{n-i}\| \geqslant b_n-b_{n-i} \geqslant ic(k-1),\\
&\|x-b_{n+2}\| \geqslant b_{n+2}-b_{n+1} \geqslant c(k-1),\\
&\|x-b_{n+3}\| \geqslant b_{n+3}-b_{n+1} \geqslant 2c(k-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\|x-b_{n+j}\| \geqslant b_{n+j}-b_{n+1} \geqslant (j-1)c(k-1).
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{y\in B_k} g(x,y) \leqslant 2Q+\frac{Q}{c(k-1)} \times\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{j-1}\right).$$

因为 i 和 j 都不超过 2^{k-1}，这里 2^{k-1} 是位于横坐标轴上且在半径为 2^{k-1} 与 2^k 的两个球之间点的个数，所以我们有

$$\sum_{y\in B_k} g(x,y) \leqslant 2Q+\frac{2Q}{c(k-1)} \cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

又因为

$$\frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x},$$

所以有

$$\sum_{y\in B_k} g(x,y) \leqslant 4Q + \frac{2Q}{c(k-1)}\int_1^{2^{k-1}} \frac{dx}{x}$$

$$= 4Q + \frac{2Q}{c(k-1)} \ln 2^{k-1} = 2Q\left(2 + \frac{\ln 2}{c}\right).$$

习　　题

二维点格

1. 二维点格上的对称随机徘徊有 $g(x, x) < \infty$.

提示　由 $p(2k+1, x, x) = 0$, 知

$$g(x, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(2k, x, x),$$

用(6)式来表示 $p(2k, x, x)$, 因为被积函数是正的,故可以逐项积分,得

$$g(x, x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{4-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2}.$$

借助于不等式 $\cos\alpha \geqslant 1-(\alpha^2/2)$ $(|\alpha| < \alpha_0)$ 可以算出上述积分.

2. 如果用 $r(x)$ 表示质点从状态 x 出发在某个时刻又回到这个状态的概率. 那么

$$g(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(x)^n.$$

提示　考虑随机变量 $\xi_k(k=1, 2, \cdots)$: 如果质点回到状态 x 至少有 k 次,它等于 1, 否则它等于零,那么

$$g(x, x) = 1 + M_x(\xi_1 + \xi_2 + \cdots).$$

3. 对于二维点格上的对称随机徘徊来说, 单点集 x 是常返的.

提示. 由习题 1 和 2 知 $r(x) = 1$. 另一方面, $1-r(x) \geqslant$

$s(x, y)[1 - \pi_x(y)]$，其中 $s(x, y)$ 是从 x 出发在首次返回 x 之前到达 y 的概率。

凸集的极点

设 H 是一有限或可数空间，E 是给定在 H 上的某个函数集合。如果对于每个 $x \in H$ 有 $f_n(x) \to f(x)$，那么称函数序列 $\{f_n\}$ 收敛到函数 f。如果由 $f_n \to f$，$f_n \in E$，有 $f \in E$，那么称集 E 是闭的。如果 E 是闭的，且从任意序列 $\{f_n\}$ 中可选出一收敛子列，其中 $f_n \in E$，那么称集 E 是紧的。如果 $f_1 \in E$，$f_2 \in E$，且对任意 $p > 0$，$q > 0$，$p + q = 1$，有 $pf_1 + qf_2 \in E$，那么称集 E 是凸的。

4. 闭集 E 是紧的充分必要条件是：存在一个函数 $c(x)$，使得对 $f \in E$，$x \in H$，有 $|f(x)| \leqslant c(x)$。

提示. 为了证明充分性，把空间 H 的所有点标上号码，然后用对角线方法。

集 E 的一个紧子集 A 称为极集，如果由 $f \in A$，$f = pf_1 + qf_2$，f_1，$f_2 \in E$，$p > 0$，$q > 0$，$p + q = 1$ 可知 f_1 和 f_2 都属于 A。

5. 如果 A 是极集，$f \in A$ 且

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n,$$

其中 $f_1, \cdots, f_n \in E$；$\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$，那么 $f_1, \cdots, f_n \in A$。

我们称泛函 $l(f)$ 是线性的，如果对任意的数 a，b 和任意的函数 f_1，f_2 有 $l(af_1 + bf_2) = al(f_1) + bl(f_2)$，且由 $f_n \to f$ 可知 $l(f_n) \to l(f)$。线性泛函的一个例子是 $l(f) = f(x_0)$，其中 x_0 是空间 H 的一个固定点。

6. 设 A 是极集，l 是线性泛函，令

$$M = \max_{f \in A} l(f).$$

那么满足 $f \in A$ 和 $l(f) = M$ 的所有函数形成之集 A_1 也是极集。

7. 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ 是一紧极集序列，那么集

$$A_\infty = \bigcap_n A_n$$

也是极集。

由一个点组成的极集称为**极点**。

8. 任一紧凸集 E 都有一个极点。

提示. 设 x 是 H 的一定点，由习题 4 知，泛函 $l_x(f) = f(x)$，在任意紧集上取到它的极大值并且可以用来"缩小"已经存在的极集(见习题 6). 从整个集 E 开始，以某种确定的次序选择所有的泛函 l_x，利用极限可以得到极集 A_∞ (见习题 7)，这集由一个函数组成。

已经证明 (Krein-Milman 定理例如见 [18]，§3)任意紧凸集是由形如 $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ 的所有函数以及它们的全体极限组成，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, $f_1, \cdots, f_n$ 是极点. 这个定理的一个特殊情形是，E 仅有一个极点；对我们的目的来说，这就足够了。

9. 如果紧凸集 E 仅有一个极点 g，那么 E 由单个函数 g 组成。

提示. 假设 $h \in E$, $h \neq g$, 于是存在某个 $x \in H$ 使得 $l(f) = \pm f(x)$ 这两个式子中有一个满足不等式 $l(h) > l(g)$. 由习题 6 可知，存在一个不包含 g 的紧凸极集 A. 集 A 有一个极点 $g_1 \neq g$，它也是 E 的极点。

正调和函数

10. 如果非负调和函数在某个点等于零， 那么它处处为零。

11. 调和函数序列的极限是调和函数。

12. 如果 f 是正调和函数，那么

$$f(x \pm e_k) \leqslant 2lf(x),$$

其中 l 是点格的维数。

我们用 E 表示在点 $x=0$ 等于 1 的正调和函数类。

13. 集 E 是凸紧集.

提示. 利用习题 12，11 和 4.

14. 如果 $f \in E$，那么对任意整数值向量 a，函数 $g(x) = (f(x+a)]/f(a)$ 属于 E.

15. 如果 g 是集 E 的极点，那么

$$g(x \pm e_k) = g(e_k)^{\pm 1} g(x).$$

提示. 利用方程 $g = pg$ 和习题 14，5.

16. 在上题的条件下，对所有 $x \in H^l$ 有 $g(x) = 1$.

提示. 由于 $g(e_k) + g(e_k)^{-1} \geqslant 2$ 而且等号只有在 $g(e_k) = 1$ 时成立，所以由方程 $g = pg$ 得 $g(e_k) = 1$.

由习题 9，13 和 16 可以推出集 E 只包含一个函数 1，因此任意正调和函数是常数.

17. 如果调和函数有下(上)界，那么它是常数.

Dirichlet 问题

设 B 是点格 H^l 的一个子集. 我们称点 $x \bar{\in} B$ 是集 B 的一个边界点，如果形如 $x \pm e_k$ 的点中至少有一个属于 B. 集 B 的所有边界点组成的集称为 B 的边界，记为 ∂B. 称函数 $f(x)$，$x \in B \cup \partial B$，在 B 上调和(上调和)，如果等式 $f(x) = Pf(x)$（不等式 $f(x) > Pf(x)$）对所有 $x \in B$ 成立. 称集 B 是连通的，如果对任意两点 x，$y \in B$ 存在 B 中一列点 $x_1 = x, x_2, x_3, \cdots, x_n = y$ 使得每个差 $x_i - x_{i-1}$ 都是向量 $\pm e_k$ 中的一个.

18. 如果集 B 是连通的，f 是 B 上的上调和函数，且 f 在 $B \cup \partial B$ 上的极小值在点 $x \in B$ 处取到，那么 f 在 $B \cup \partial B$ 上是常数.

19. 如果 B 是有限集， 且 B 上的调和函数 f_1, f_2 在 ∂B 上相等，那么 f_1, f_2 在 B 上也相等.

提示. 将习题 18 应用于函数 $f_1 - f_2$ 和 $f_2 - f_1$.

在下面习题 20—24中，τ 表示首次到达集 ∂B 的时间，φ 是给定在 ∂B 上的任一函数.

20. 如果集 B 是连通的，则对所有的 $x \in B$，均值 $M_x\varphi(X(\tau))$ 要么都存在，要么都不存在.

21. 函数 $f(x) = M_x\varphi(X(\tau))$ 在 B 上是调和的，且在 ∂B 上等于 φ（假定这个均值对所有的 $x \in B$ 都存在）. 由习题 19，21 知，对点格上的任意真子集 B 和任一个 ∂B 上有界的函数 φ，存在一个在 B 上调和且在 ∂B 上等于 φ 的函数 f（即 Dirichlet 问题有一个解），并且当 B 是有限集时这个解是唯一的. 对无限集 B 来说，Dirichlet 问题有唯一的有界解的一个充分条件在习题 22 中给出.

22. 如果集 B 的边界 ∂B 是常返的且函数 φ 有界，那么函数 $f(x) = M_xf(X(\tau))$ 是在 B 上有界调和，且在 ∂B 上等于 φ 的唯一函数.

提示. 令函数 $g(x)$ 在 B 上有界、调和且在 ∂B 上等于 φ，K 是中心在原点、边长为 a 的 l 维立方体，τ_1 是首次到达 $\partial(B \cap K)$ 的时间，那么对 $x \in B \cap K$，有 $g(x) = M_xg(X(\tau_1))$，且当 $a \to \infty$ 时，这个等式变成 $g(x) = M_x\varphi(X(\tau)) = f(x)$（由 ∂B 的常返性知，当 $a \to \infty$ 时，$\tau = \tau_1$ 成立的概率趋于 1）.

23. 如果集 ∂B 非常返，一般来说，习题 22 的提法不成立.

提示. 考虑函数 $f = 1$ 和 $g = \pi_{\partial B}(x)$.

24. 在整个点格调和的函数可以这样确定：如果对任意 x 和包含 x 的任意有限集 B，等式 $f(x) = M_xf(X(\tau))$ 成立，

那么 f 是调和的.

位势的性质

在习题 25—31 中,除非特别声明,"位势"(用 $G\varphi$ 表示)这个词是指一个非负函数的有限位势.

25. 存在这样的点使得位势在这些点上的值与零的差任意小.

提示. 对不等式 $G\varphi \geqslant h$ (h 是一个正常数) 用算子 P^n,然后令 n 趋于无穷.

26. 如果在某个常返集 B 上 $\varphi(x) \geqslant \varepsilon$ (这里 ε 是一正数),那么位势 $G\varphi$ 等于无穷.

27. 如果一个过分函数不大于某个位势,那么它本身也是一个位势.

提示. 利用公式 $f = G\varphi + h$ 和习题 25.

28. (包络原理) 任给一族位势 $\{f_a\}$, 那么函数

$$f(x) = \inf_a f_a(x)$$

也是位势.

我们把满足 $\varphi(x) > 0$ 的点 x 组成的集定义为位势 $G\varphi$ 的载体 (carrier).

29. (控制原理) 如果在 $G\varphi_2$ 的载体上有 $G\varphi_1 \geqslant G\varphi_2$, 那么 $G\varphi_1 \geqslant G\varphi_2$ 处处成立.

提示. 利用(24)式, 把其中 τ 的值取为首次到达 $G\varphi_2$ 载体的时间.

30. (扫除原理)设 τ 是首次到达集 B 的时间.函数 $f(x) = M_x G\varphi(X(\tau))$ 具有下述性质: 1) f 是位势; 2) f 在 B 上等于 $G\varphi$; 3) f 不大于 $G\varphi$; 4) f 的载体在 B 之中. 函数 f 由上述四个条件唯一决定.

31. 如果 $G\varphi_1 \geqslant G\varphi_2$, 问 $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$ 是否成立?

提示 令 $\varphi_1(0)=\varphi_1(e_1)=1$，对其它 x 令 $\varphi_1(x)=0$；令 $\varphi_2(0)=1+\varepsilon$，当 $x\neq 0$ 时令 $\varphi_2(x)=0$. 借助于渐近估计式(12)，当 $\|x\|$ 充分大时，不等式 $G\varphi_1\geqslant G\varphi_2$ 对取自 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 的一切 ε 都成立，对所有其它的 x 值，令 ε 减小就得到所要求的不等式，这是因为当 $\varepsilon=0$ 时，有 $G\varphi_1>G\varphi_2$，而 $G\varphi_2$ 是连续地依赖于 ε 的.

过分函数

32. 过分函数的表示式 $f=G\varphi+h$ 是唯一的，其中 $\varphi\geqslant$，$h\geqslant 0$ 且 h 是调和函数.

33. 当 $l=1$ 和 2 时，所有过分函数都是常数.

34. 过分函数可以如下确定： 如果对任意状态 x 和任意集 B(包括空集)，不等式 $f(x)\geqslant M_xf(X(\tau))$ 成立，其中 τ 是首次到达 B 的时间，那么 f 是过分函数.

容度的性质

在习题 35—41 中，假设所讨论的集都是非常返的，且用 ∂B 表示集 B 的边界(见习题 18 前面的那一段话).

35. 如果 $A\subset B$，那么 $C(A)\leqslant C(B)$.

36. $C(A\cup B)\leqslant C(A)+C(B)$.

提示. 首先考虑不相交的集.

37. 集 $B\cup\partial B$ 上的平衡态全部集中在 ∂B 上.

38. 集 $B\cup\partial B$ 和 ∂B 上的平衡态相等，特别有

$$C(B\cup\partial B)=C(\partial B).$$

提示. 因为集 $H^l\setminus B$ 是常返的，所以进入 B 的质点穿过 ∂B 离开它的概率为 1.

39. 点 x 的容度等于 $1/[g(x,\ x)]$.

40. 由 n 个点组成的集合，当这些点两两之间的距离无限增加时，这集的容度趋于 $n/[g(0,\ 0)]$.

提示 利用渐近估计式(12)和习题 35，39.

41. 非常返无穷集的容度等于无穷.

非对称的随机徘徊

在点格 H^2 上的随机徘徊中，假设质点向右、向左、向上和向下跳跃的概率分别为 p, q, r 和 s($p, q, r, s > 0$, $p + q + r + s = 1$), 并且与运动以前的状况无关. 令

$$Pf(x) = pf(x + e_1) + qf(x - e_1) + rf(x + e_2) + sf(x - e_2).$$

如果 $Pf = f$, 那么称函数 f 是调和的. 如同对称的情形一样，易证在零点等于 1 的正调和函数类 E 是紧凸的(参看习题 11—13). 我们希望求出集 E 的极点.

42. 如果 $A(x)$ 是集 E 的一个极点，那么

$$A(x_1e_1 + x_2e_2) = \lambda^{x_1}\mu^{x_2}, \tag{45}$$

其中 λ 和 μ 是满足关系式

$$p\lambda + \frac{q}{\lambda} + r\mu + \frac{s}{\mu} = 1 \tag{46}$$

的正数.

提示. 对照习题 15.

在习题 43—47 中，说明了满足 (45) 式的函数 $A(x)$ 事实上是一个极点(参见第一章 § 4 的讨论).

43. 对调和函数 φ, 令

$$\sup_x \frac{\varphi(x)}{A(x)} = M < \infty.$$

如果在点 y 有

$$\frac{\varphi(y)}{A(y)} \geq M - \varepsilon,$$

那么

$$\frac{\varphi(y + e_1)}{A(y + e_1)} \geq M - c\varepsilon,$$

其中

$$c = 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{q}{\lambda^2} + \frac{r\mu}{\lambda} + \frac{s}{\lambda\mu}\right).$$

44. 在上一题中如果 $M > 0$，那么对任意的数 N，存在一系列状态 $y_0, y_1 = y_0 + e_1, \cdots, y_n = y_{n-1} + e_1$，使得

$$\varphi(y_0) + \frac{\varphi(y_1)}{\lambda} + \cdots + \frac{\varphi(y_n)}{\lambda^n} \geqslant N\Lambda(y_0).$$

45. 如果 $f \in E$ 且

$$\sup_x \frac{f(x)}{\Lambda(x)} < \infty,$$

那么对所有 x，有

$$f(x + e_1) \leqslant \lambda f(x).$$

提示. 在习题 44 中令

$$\varphi(x) = f(x + e_1) - \lambda f(x).$$

46. 在上一题的条件下，有 $f = \Lambda$.

提示. 对向量 $-e_1$, e_2 和 $-e_2$ 进行同样的讨论.

47. 函数 Λ 是集 E 的一个极点.

由习题 42 和 47 知，集 E 的极点和方程(46)的正解 (λ, μ) 一一对应. 对 $p = q$ 且 $r = s$ 时，易证这个方程有唯一的正解 $\lambda = \mu = 1$. 在其它的情形中它定义了在 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ 的象限内的某个椭圆.

第二章　某些方程的概率解

§1. Wiener 过程的定义

上一章我们研究了 l 维整数值点格上的随机徘徊．现在设想相邻格点之间的距离不等于 1，而是等于某个常数 δ（称 δ 为点格参数）．这时质点在 n 步中移动的距离自然与 δ 成正比．我们把转移频率看作 δ 的函数，使得对任意 δ，平均来说，在同样长的时间内质点将移动同样长的距离．可以期望，当 $\delta\to 0$ 取极限时会出现一个连续的随机徘徊，它的性质与点格上的随机徘徊类似．

为了在缩减的参数 δ 和增长的转移频率之间找出适当的关系，为了得到时刻 t 质点位移的极限分布，我们利用独立随机向量和的中心极限定理．在向量 $\xi_i(i=1,2,\cdots)$ 独立同分布、均值为零且二阶矩有限这一特殊情形下，该定理断言：和的标准化

$$\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

的分布，当 $n\to\infty$ 时收敛到正态分布，后者的均值为零且二阶矩矩阵和随机向量 ξ_i 的二阶矩矩阵相同．

用 ξ_i 表示单位点格上随机徘徊的质点在第 i 步的位移．由随机徘徊的对称性可知，$M\xi_i=0$．我们来求随机向量 ξ_i 的二阶矩．设 $x_1,\cdots,x_l$ 是这个向量的坐标，由于 $x_1,\cdots,x_l$ 中只能有一个不为零，于是所有的乘积矩 $Mx_jx_k(j\neq k)$ 都等于零．考虑到 x_i 取值 ±1 的概率等于 $1/2l$，取值零的概率等

于 $1-1/l$，所以 $Mx_1^2 = \cdots = Mx_l^2 = 1/l$。因此，在此种情形下，向量(1)的极限有球对称的正态分布，其方差在任一方向都等于 $1/l$.

注意，在参数为 δ 的点格上的随机徘徊中，质点在 n 步中的位移等于

$$\delta(\xi_1 + \cdots + \xi_n). \tag{2}$$

比较(1)和(2)可知，为了得到一个合理的极限分布，参数 δ 必须是 $1/\sqrt{n}$ 阶的，或者等价地说，移动的步数 n 必须是 $1/\delta^2$ 阶的. 因此我们假设质点接连两次跳跃之间的时间间隔为 δ^2/l（引进系数 $1/l$ 是为了简化最后的关系式）. 在这个随机徘徊中，质点在时刻 t 的位置记作 $X(t)$（当然，应该认识到 $X(t)$ 还没有对所有的 t 定义，只对那些是 δ^2/l 的倍数的 t 定义了）. 在时刻 t 质点已跳了 $n = lt/\delta^2$ 次，这表示

$$X(t) - X(0) = \sqrt{\frac{lt}{n}}(\xi_1 + \cdots + \xi_n),$$

其中

$$n = \frac{lt}{\delta^2}.$$

因此，用一个常系数 $\sqrt{lt}$ 乘向量(1)就得到向量 $X(t)-X(0)$. 于是令 $\delta \to 0$ 取极限，增量 $X(t) - X(0)$ 有对称正态分布，其方差在任何方向都等于 $(1/l)(\sqrt{tl})^2 = t$. 这分布的密度为

$$p(t, y) = p(t, y_1, \cdots, y_l) = \frac{1}{(2\pi t)^{l/2}} e^{-\frac{y_1^2+\cdots+y_l^2}{2t}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{l/2}} e^{-y^2/2t} \tag{3}$$

（如果 $y = y_1e_1 + \cdots + y_le_l$，令 $y^2 = y_1^2 + \cdots + y_l^2$）. 在这极限中，$t$ 可以是任意的正数，而 $X(t)$ 和 $X(0)$ 可以是 l

维空间中的任意点.

从(3)式显见，在极限情形增量 $X(t)-X(0)$ 的坐标是相互独立的. 但应注意，诸项 ξ_i 的坐标彼此是不独立的. 如果它们中有一个不为零，那么其余的都等于零. 不论空间的维数是多少，$X(t)-X(0)$ 的每个坐标的极限分布是均值为零、方差为 t 的正态分布.

于是，有理由相信，点格上的随机徘徊通过极限过渡成为一连续的过程，对它来说经过时间 t 质点的随机位移具有密度(3). 1828 年植物学家 Brown 发现悬在液体中的微粒在作不规则运动，这运动的数学理论可归结为这个过程. Brown 运动的理论是 1906 年由 Einstein 和 Smoluchowski 给出的. 1923 年 Wiener 首次发表了这个随机过程数学的正确的数学结构. 下面来给出这个过程的定义，通常称它为 Wiener 过程.

考虑由函数 $X(t)$, $t\geqslant 0$ 组成的空间 X，假设函数取值于 l 维向量空间 R. 把这些函数理解为 Brown 运动的所有可能轨道，设 P_x 是给定在 X 上的一族分布(即概率测度)，其中 x 是 R 中的任一点. 测度 P_x 理解为质点由时间 $t=0$ 开始从点 x 出发其随机轨道的分布. 对应于测度 P_x 的均值记作 M_x. (在 P_x 和 M_x 和 x 无关的情形下，简记为 P 或 M[1].)

说X上的概率测度族 P_x **定义了一个** Wiener **过程** $X(t)$，**如果满足下列条件**:

a) **空间X仅包含连续函数**，

b) $P_x\{X(0)=x\}=1$，

---

1) 有时会遇到并非对所有轨道都有定义的随机变量 ξ. 我们用通常的表示法来定义这些随机变量的均值，但是积分或求和不是在整个基本事件空间 Ω 上，而仅仅是在 ξ 有意义的区域 Ω_ξ 上. 在 ξ 没有定义的地方令 $\xi=0$，便可得到均值 $M_x\xi$ 的一个等价的定义.

c) 对 $s \geqslant 0, t > 0$，随机增量 $X(t+s)-X(s)$ 具有对称正态分布，其密度为(3)式，且这个增量与时刻 s 之前这轨道 $X(t)$ 所确定的任何事件或任何随机变量独立[1]

特别地，对任意区域 $\Gamma \subset R$ 有

$$P_x\{X(t)\in\Gamma\} = P_x\{X(t)-X(0)\in\Gamma - x\}$$

$$= \int_{\Gamma-x} p(t, y)dy = \int_{\Gamma} p(t, z-x)dz \qquad (4)$$

$$(t>0, x\in R).$$

记这个概率为 $p(t, x, \Gamma)$，称它为 Wiener 过程的转移概率.

有时如下考虑问题是有用的，即不去考虑从一个定点 x 出发的轨道，而考虑从具有分布 μ 的一个随机点出发的轨道。这时任一事件 A 的概率可根据关系式

$$P_\mu\{A\} = \int_R P_x\{A\}\mu(dx)$$

来计算. 称这过程是具有初始分布 μ 的 Wiener 过程. 注意，对任意随机变量 ξ，有

$$M_\mu\xi = \int_R M_x\xi\mu(dx). \qquad (5)$$

§ 2. 离开一个圆的时间的分布和离开时间的均值

在第一章中，我们已经知道了点格 H^l 上的随机徘徊可以概率为 1 地到达哪些集. 由于到达一个集 A 意味着从余集 $H^l\setminus A$ 离开，因此我们也知道了质点能从哪些集概率为 1 地离开. 对于 Wiener 过程可以合理地提出同样的问题. 设 G 是任一区域，τ 是轨道 $X(t)$ 从这区域首次离开的时间(图 4)。我

---

1) 这种类型的事件和随机变量分别是指，对空间 X 中包含所有形如 $\{X(u)\in\Gamma\}$ 的集的最小 σ 代数中的集，以及关于此 σ 代数可测的函数，其中 Γ 是 R 的一个区域，$u\leqslant s$. 今后我们将不讨论可测性的问题. 愿意了解这方面问题的读者可参阅[4]的第三章.

们不仅关心离开概率 $P_x\{\tau < \infty\}$，$x\in G$，而且也关心均值 $M_x\tau$，以及质点在时刻 τ 的位置 $X(\tau)$ 的分布.

对于点格上的随机徘徊探讨类似的问题可能也是有趣的. 但在连续的情形下，过程有着引人注目的对称性，因此这些解取一种简单的分析形式. 下面我们将会看到，这些问题归结为 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 和 Poisson 方程 $\Delta u = -2$ 的边界值问题，因此我们可以一方面用分析的工具来研究随机徘徊，另一方面，利用概率的思想来解决分析问题.



图 4

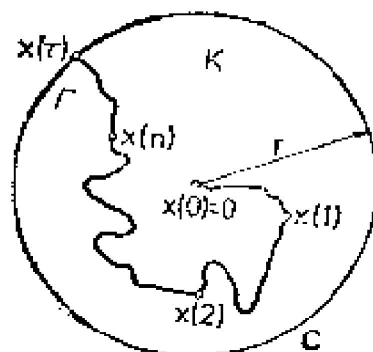


图 5

下面将讨论平面上的 Wiener 过程. 不难把所有这些结果推广到任意维数的空间上去[1].

作为第一步，考虑质点首次离开半径为 r 的某个圆内区域 K 的时间 τ，这里假定质点是从圆心开始运动的. 由于增量 $X(t)-X(0)$ 和起始点 $X(0)$ 无关，所以圆在平面上的位置无关重要，可以假设圆心和原点重合(图 5).

先证明：**质点离开圆 K 的概率为 1.** 显然，如果到了时刻 $t=n$ 轨道 $X(t)$ 仍在 K 内，那么所有的增量 $X(1)-X(0)$，

1) 一维情形的结果特别简单(见本章后面的习题).

$X(2)-X(1), \cdots, X(n)-X(n-1)$ 的绝对值都小于 $2r$. 这些增量是独立的且有相同的正态分布. 因此

$$P_0\{\tau \geqslant n\} \leqslant [P\{|X(1)-X(0)|<2r\}]^n = \alpha^n, \quad (6)$$

其中 α 肯定是小于 1 的. 因此对任意 n, 有 $P_0\{\tau=\infty\} \leqslant \alpha^n$, 所以 $P_0\{\tau=\infty\}=0$.

现在求点 $X(\tau)$ 的分布. 显然 $X(\tau)$ 位于圆 K 的圆周 C 上. 由于增量 $X(t)-X(s)$ 的分布密度仅仅依赖于 $t-s$ 和向量 $X(t)-X(s)$ 的长度,所以以点 O 为心把平面旋转任一角度时, Wiener 轨道的分布将不改变. 因此,对圆周 C 上的所有旋转, 随机点 $X(\tau)$ 的分布都是不变的. 具有这个性质的分布只能是均匀分布,对此分布来说,到达任一弧 Γ 的概率和这弧的弧长成正比. 即 $X(\tau)$ 在圆周 C 上均匀地分布.

最后我们证明, 平均时间 $M_0\tau$ 和圆 K 半径的平方成正比. 为此,利用 Wiener 过程的下述性质(自相似性): 如果平面 R 放大 r 倍而时间轴伸长 r^2 倍 ($r>0$), 那么由原来的 Wiener 过程所得到的新过程仍是 Wiener 过程. 事实上, 在这种类型的变换下, 轨道的连续性和增量的独立性显然是不变的,而且以(3)式为密度的正态分布也不改变.

考虑以原点为中心的两个圆: 一个是半径为 r 的圆 K_r, 一个是半径为 1 的圆 K_1 (图 6). 让一个 Wiener 轨道 $X(t)$ 从原点出发, 并且用 τ_r 和 τ_1 表示它首次离开 K_r 和 K_1 的时间. 给定了曲线 $X(t)$, 我们构造轨道 $\tilde{X}(t)=rX(t')$, 其中 $t=r^2t'$, 且用 $\tilde{\tau}_r$ 表示 $\tilde{X}(t)$ 首次离开圆 K_r 的时间. 显然这时 $\tilde{\tau}_r=r^2\tau_1$, 因此 $M_0\tilde{\tau}_r=r^2M_0\tau_1$. 另一

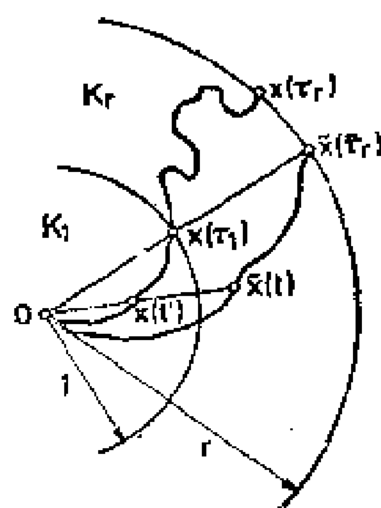


图 6

方面，根据自相似性，过程 $\tilde{X}(t)$ 也是 Wiener 过程，因此有

$$M_0\tau_r = M_0\tilde{\tau}_r = cr^2, \tag{7}$$

其中 $c = M_0\tau_1$ 是某个常数。

当然，我们还不知道 c 是否会等于无穷。但 $M_0\tau_1$ 的有限性易从估计式(6)推出。即如果 $F(t)$ 是 τ 的分布函数，那么

$$\begin{aligned} M_0\tau &= \int_0^\infty t\,dF(t) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n t\,dF(t) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty n \int_{n-1}^n dF(t) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty nP_0\{\tau \geqslant n-1\} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty n\alpha^{n-1} < \infty. \end{aligned}$$

所得到的结果对任何维数空间中的 Wiener 过程都是成立的。注意，对任意 l，(7) 式的指数都是 2（而不是 l）。当然(7)式中的常数 c 和空间维数 l 有关。 更进一步的研究表明 $c = 1/l$（见习题）。因此在二维情形

$$M_0\tau_r = \frac{1}{2}r^2. \tag{8}$$

在一维情形，$X(\tau)$ 分布的均匀性意味着从线段中点出发的质点到达这线段的每一端点（在到达另一端点之前）的概率为 1/2。

§3. 马尔可夫性和强马尔可夫性

设 $X(t)$ 为从任意点 x 出发的 Wiener 过程我们需要它的另外一个性质。注意，任一分布为 μ 的随机向量与从 0 出发

且与这个随机向量独立的 Wiener 过程的和描述了一个初始分布为 μ 的 Wiener 过程. 另一方面，差 $X(s+t)-X(s)$（其中 s 固定，而 t 从 0 到 $+\infty$）按定义是一个从 0 出发且与时刻 s 之前 $X(t)$ 状况独立的 Wiener 过程. $X(s)$ 的值由时刻 s 之前 $X(t)$ 的状况决定. 因此，当把随机轨道 $X(s+t), 0 \leqslant t < +\infty$，表示为 $X(s+t)-X(s)$ 与 $X(s)$ 的和时，可以发现，给定任意只与时刻 $s>0$ 之前 Wiener 过程状况有关的条件 A，过程 $Y(t)=X(s+t)$ 是初始分布为 $\mu(\Gamma)=P_x\{A, X(s)\in\Gamma\}$ 的 Wiener 过程（过程 $X(t)$ 的马尔可夫性）. 从广义上讲，马尔可夫性意味着当现在 $X(s)$ 已知时，将来的过程 $X(s+t)$ 与过去 $X(s-t)$ 独立. 1907 年 Markov 首先研究了有这种性质的随机序列 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$，…. 注意，如果没有条件 A，那么 $\mu(\Gamma)$ 变成转移概率 $p(s, x, \Gamma)=P_x\{X(s)\in\Gamma\}$.

对包括 Wiener 过程在内的很大一类随机过程来说，如果把过程的现在不仅看成 s 固定时的 $X(s)$ 而且也看成某个随机时间 τ 的 $X(\tau)$，那么马尔可夫性质仍成立. 例如，从一点 $x>0$ 出发沿着直线运动的 Wiener 过程，在首次到达零点之后的状况和从零点出发的过程完全一样. 这个论断尽管表面上显然，但却是需要证明的，而且实际上已被证实. 可以证明，一般说来，如果 $X(t)$ 是任意维数空间上的Wiener 过程，τ 是 $X(t)$ 首次离开任一区域的时间(图 7)，那么，任意给定条



图 7

件 A，它只与 $X(t)$ 在 τ 之前的状况有关，过程 $Y(t) = X(\tau+t)$，$0 \leqslant t < +\infty$，是一个初始分布为 $\mu(\Gamma)=P_x\{A, X(\tau)\in\Gamma\}$ 的 Wiener 过程（强马尔可夫性）[1]．如果没有条件 A，那么测度 μ 就是向量 $X(\tau)$ 的分布．

强马尔可夫性不仅对首次离开的时间成立，而且一般说来对这样的随机时间 τ 也成立：它的发生与否由 $[0, \tau]$ 这段时间内过程的状况决定（例如对 $\tau = \sigma + 1$ 成立，这里 σ 是首次离开时间）．我们称所有这样的随机变量为马尔可夫时间．

§4．离开概率的调和性质

在 §2 我们研究了 Wiener 过程首次离开一个圆的时间 τ，其中假定了质点的运动是从圆心开始的．如果起始点不是圆心，那么在时间 τ 之前随机徘徊的对称性就被破坏了，这时圆的问题并不比其它区域的问题更简单．现在我们来讨论这个一般的情形．

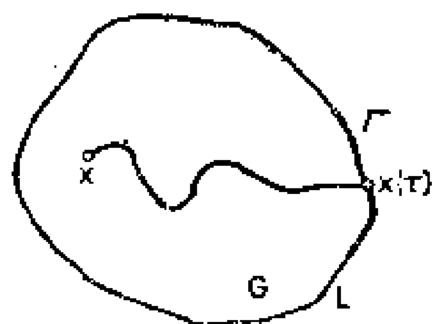


图 8

设 G 是平面上的某个区域且 $X(0) = x \in G$（图 8）．质点在首次离开 G 的时刻 τ 处在 G 的边界 L 上．$X(\tau)$ 在边界 L 的某一确定集合 Γ 上的概率是起始点 x 的函数，记这函数为 $f(x)$．

注意

$$f(x) = M_x\varphi(X(\tau)), \tag{9}$$

1) 系统地研究强马尔可夫性是由 E. B. Dynkin 和 A. A. Yushkevich (1956) 以及 R. Blumenthal (1957) 开始的．对这个特性的证明可参阅[3]（第 5 章 §6）．

其中 $\varphi(y)$ 是定义在 L 上的函数，它在 Γ 上等于 1，在 Γ 外等于零． 在研究函数 $f(x)$ 时，函数 φ 的特殊性质是无关重要的．只须假定函数 φ 是有界的(和可测的)．

这节我们要证明，$f(x)$ 是区域 G 中的调和函数，即它满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$．下面将看到，在很一般的条件下，函数 $f(x)$ 在区域的边界上就是 $\varphi(y)$，所以(9)式用边界上的值定义了区域内部的一个调和函数(从而给出了 Dirichlet 问题的一个解)．

现在来证明，对区域 G 内的任意圆 K，函数 f 在圆心 a 的值等于 f 在 K 的圆周 C 上的平均值

$$f(a) = \int_C f(x)\mu(dx), \tag{10}$$

其中 μ 是 C 上均匀概率分布(图 9)．

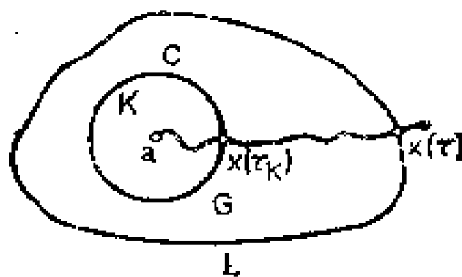


图 9

我们让质点从点 a 开始运动，轨道在到达 L 之前，必然要离开 K．如前所知，在首次离开 K 的时刻 τ_K，质点在圆周 C 上是均匀分布的．按照强马尔可夫性，这意味着可以把在时刻 τ_K 开始的过程 $X(t)$ 看作是初始为均匀分布 μ 的 Wiener 过程，而"忘掉"时刻 τ_K 之前 $X(t)$ 的状况．因此，根据(5)式，有

$$M_a\varphi(X(\tau)) = M_\mu\varphi(X(\tau)) = \int_C M_x\varphi(X(\tau))\mu(dx),$$

这正是(10)式．

现在验证，具有性质(10)(对任意圆 K)的每一个函数都满足 Laplace 方程.

我们的任务是验证函数 $f(x)$ 在 G 内任意次可微[1]. 在 G 外补定义 $f(x)$ 为 0，借助于一个函数 $g(x)$ 通过取平均可以"平滑"函数 f，即

$$\tilde{f}(x) = \int_R f(x+y)g(y)dy, \tag{11}$$

其中 $g(x)$ 是无穷次可微、在 0 点大于零，在 0 点的一个 ε 邻域外等于零且对于旋转不变的函数. 作变量替换 $y = z - x$，得到

$$\tilde{f}(x) = \int_R f(z)g(z-x)dz.$$

后一个积分可以对 x 任意次微分，因此 $\tilde{f}(x)$ 是无穷可微的函数.

如果点 $x \in G$ 到区域 G 的边界 L 的距离大于 ε，那么利用极坐标容易计算积分 (11)，取极点为 x. 先沿着半径为 $\rho \leqslant \varepsilon$ 的圆周积分，这时可以把 Jacobian 变换 ρ 和权函数 $g(y)$ (它们在这圆周上是常数) 拿到积分号外边来，剩下 $f(x+y)$ 在这圆周上的积分等于函数 f 在这圆周上的平均值，除了相差一个与 ρ 有关的常数外，这个值等于 f 在圆心的值，即等于 $f(x)$. 于是，当把 $f(x)$ 再拿到对 ρ 的积分号外边，我们发现，对连同其 ε 邻域一起属于 G 的所有 x 来说，除了相差一个常数因子外，$\tilde{f}(x)$ 等于 $f(x)$. 因此在这些点上，函数 $f(x)$ 可以无穷多次微分. 由 ε 的任意性知，对 G 中的所有点这一事实成立.

把函数 $f(x)$ 在任意点 $a \in G$ 的邻域内展成 Taylor 级数：

---

1) 由马尔可夫过程的一般性质可知 $f(x)$ 是可测的(见第41页的注).

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - a_2) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - a_1)^2\right. \\
&+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \\
&\left.+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - a_2)^2\right] + \alpha(x),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中导数是在坐标为 (a_1, a_2) 的点 a 取的，且对充分小的 ρ 有 $|\alpha(x)| \leqslant k\rho^3 (\rho = |x - a|)$. 把(12)式两边沿着以 a 为圆心的圆周 C 对单位均匀测度 μ 积分，如果取圆 C 的半径 ρ 使整个圆在区域 G 内，那么根据（10）式，在等式左边得到 $f(a)$; 在等式右边，$x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$ 和 $(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ 项的积分将变成零. 这是由于对称的缘故，在上、下(或左、右)半圆上的积分能彼此抵消. 再由旋转下的不变性，有

$$
\begin{aligned}
&\int_C (x_1 - a_1)^2 \mu(dx) = \int_C (x_2 - a_2)^2 \mu(dx) \\
&= \frac{1}{2}\int_C [(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]\mu(dx) \\
&= \frac{1}{2}\rho^2.
\end{aligned}
$$

因此，对充分小的 ρ, 有

$$
\begin{aligned}
f(a) = f(a) &+ \frac{1}{4}\rho^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) \\
&+ \int_C \alpha(x)\mu(dx),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right| = \frac{4}{\rho^2}\left|\int_C \alpha(x)\mu(dx)\right|
$$

$$\leqslant \frac{4}{\rho^2} k\rho^3 = 4k\rho.$$

令 ρ 趋于零并用符号 Δ 表示 Laplace 算子 $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 在点 a 得到

$$\Delta f = 0$$

这就证明了函数 $f(x)$ 是调和的.

§5. 正则边界点和非正则边界点

现在我们来分析，当 x 趋于区域 G 的边界 L 上的某个点 a 时，调和函数

$$f(x) = M_x \varphi(X(\tau))$$

的行为，这里假定边界函数 φ 在点 a 连续而且有界.

注意，如果 $x = a$，即运动是从 a 点本身出发的，那么 $\tau = 0$, $X(\tau) = a$ 且 $f(x) = \varphi(a)$.

我们来说明这样一个事实：如果边界 L 在点 a 的邻域内是“充分好的”，那么

$$\lim_{\substack{x \in G \\ x \to a}} f(x) = \varphi(a). \tag{13}$$

这个关系来自下述明显的事实：由靠近 a 的点 x 出发的轨道，很快到达边界的概率很大. 在这段时间内质点不可能离开起始点 x 太远，因此，它在 a 的附近到达边界 L. 但是这个明显的情景并不是总能实现的. 例如，如果 G 表示一个挖去圆心 a 的单位圆区域（图 10），那么，不论这轨道从离 a 多近开始，它从非 a 的边界点处离开 G 的概率为 1（这将在 §7 中证明）. 因此，当 $x \to a$ 时，τ 并不总趋于零. 这些考虑使我们有如下定义. 边界上的一个点 a 称为是**正则的**，如果对任意 $h > 0$，有

$$P_x\{\tau > h\} \to 0 \quad 当\ x \to a\ 时 \tag{14}$$

(当 $x \to a$ 时 τ 依概率收敛到零)。

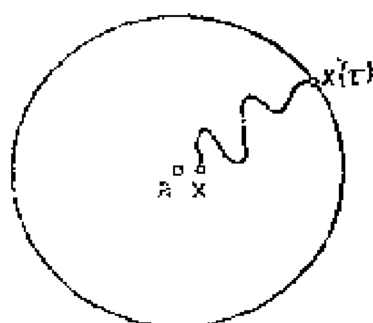


图 10

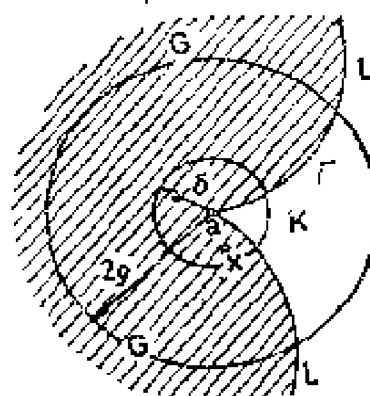


图 11

现在来证明，在任意正则点上边界条件(13)成立。

设 Γ 是边界 L 的这样一部分，它位于以正则点 a 为圆心、2ρ 为半径的圆 K 之内（图 11）。要证明，对任意 $\rho > 0$ 有

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in G}} P_x\{X(\tau) \in \Gamma\} = 1 \tag{15}$$

（点 $X(\tau)$ 依概率收敛到 a）。

我们指出，在时间 h 内，Brown 运动质点的最大位移

$$Z(h) = \max_{0 \leqslant t \leqslant h} |X(t) - X(0)|$$

和起始点 $x = X(0)$ 无关。对每一个固定的轨道，当 $h \downarrow 0$ 时 $Z(h)$ 将小于数 ρ。这意味着在 $h \downarrow 0$ 的极限中，事件 $\{Z(h) < \rho\}$ 是一必然事件。因此，

$$\lim_{h \downarrow 0} P\{Z(h) < \rho\} = 1 \tag{16}$$

（$Z(h)$ 依概率收敛到零）。

给定任一数 $\varepsilon > 0$，取 $h > 0$ 使

$$P\{Z(h) < \rho\} > 1 - \varepsilon。 \tag{17}$$

根据(14)式知，对这 h，存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $|x - a| < \delta$ 时，

有

$$P_x\{\tau < h\} > 1 - \varepsilon. \qquad (18)$$

显然，可以假定 $\delta < \rho$.

如果对 $|x - a| < \delta, x \in G$，事件 $\{Z(h) < \rho\}$ 和 $\{\tau < h\}$ 同时发生，那么在 h 这段时间内，轨道在离 x 不超过 ρ 时就到达了 L，也就是说，在真正离开圆 K 之前就到达了 L. 因此 $X(\tau) \in \Gamma$ 且

$$P_x\{X(\tau) \in \Gamma\} \geqslant P_x\{Z(h) < \rho, \tau < h\}.$$

由这不等式和估计式(17)，(18)，对 $|x - a| < \delta, x \in G$ 有

$$P_x\{X(\tau) \in \Gamma\} > 1 - 2\varepsilon.$$

这证明了(15)式.

下面验证，条件(13)对任何有界的，在正则边界点 a 处，连续的函数 $\varphi(y)$ 成立. 设 μ_x 是在 $X(0) = x \in G$ 的条件下，随机点 $X(\tau)$ 的分布. 于是

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_L \varphi(y)\mu_x(dy) - \varphi(a) \\ &= \int_\Gamma [\varphi(y) - \varphi(a)]\mu_x(dy) \\ &\quad + \int_{L\setminus\Gamma} \varphi(y)\mu_x(dy) - \varphi(a)[1 - \mu_x(\Gamma)], \end{aligned}$$

和以前一样，其中 Γ 是边界 L 在以点 a 为圆心的圆 K 内的那部分. 由于函数 $\varphi(y)$ 在点 a 连续，因此可以取圆 K 使 $\varphi(y)$ 和 $\varphi(a)$ 的差小于任意数 $\varepsilon > 0$. 于是有

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(a)| &< \varepsilon\mu_x(\Gamma) + \lambda\mu_x(L\setminus\Gamma) \\ &\quad + \lambda[1 - \mu_x(\Gamma)], \end{aligned}$$

其中数 λ 是 $|\varphi(y)|$ 的界. 由于 $x \to a$ 时 $\mu_x(\Gamma) \to 1$ 且 $\mu_x(L\setminus\Gamma) \to 0$，故知，对充分靠近 a 的 x 来说，不等式的右边小于 2ε. 这表示对 $x \in G$，当 $x \to a$ 时，$f(x)$ 趋于 $\varphi(a)$.

用条件(14)定义边界点 a 的正则性时，要考虑从无穷多

个不同的 x 出发的轨道，而直接验证这个条件是困难的．用一个从点 a 本身出发的轨道来表述的正则性判别法，可以使对正则边界点的认识变得容易．为此，不去考虑首次离开 G 的时刻 τ（对 $x=a$，τ 恒为零），而考虑使轨道处于 G 外的大于零的确定时间中的第一个（首次）（在零之后首次离开 G 的时间 σ）．如果在满足 $X(t)\in G$ 的 $t>0$ 中没有一个 t 是首次的（对任意小的正值 t，轨道都能跑到 G 外，就是这种情形），那么将认为 σ 等于零．（图 12 表明了在各种轨道中时间 τ 和 σ 的关系．）

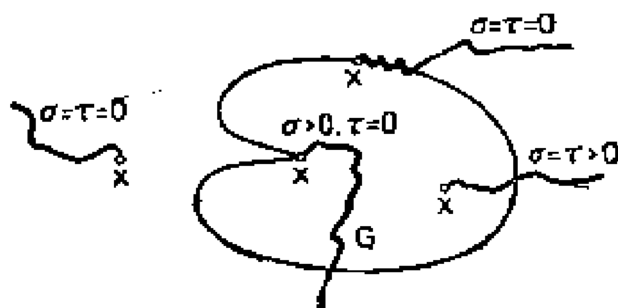


图 12

如果

$$P_a\{\sigma=0\}=1, \tag{19}$$

那么边界点 a 是正则的．

为了证明这个判别法，考虑事件 A_u："在时间间隔 $[u,h]$ 中，轨道位于 G 内"（$0<u<h$）．显然当 u 减小时，事件 A_u 递减且它们的交就是事件 $\{\sigma>h\}$．因此对 R 中的任意 x，有

$$P_x[\sigma>h]=\lim_{u\downarrow 0}P_x\{A_u\}$$

其中函数 $P_x\{A_u\}$ 当 $u\downarrow 0$ 时单调递减．

现在来证明，当 $u>0$ 固定时，概率 $P_x\{A_u\}$ 关于 x 是连续的．事实上，事件 A_u 只和 $X(t+u)$，$t\geqslant 0$ 的值有关，对于过程 $Y(t)=X(u+t)$ 它变成事件 $\{\tau>h-u\}$．由马尔

可夫性知 $Y(t)$ 是具有初始分布为 $\mu(\Gamma)=p(u, x, \Gamma)$ 的 Wiener 过程。因而

$$
\begin{aligned}
P_x\{A_u\} &= \int_R P_y\{\tau > h-u\} p(u, x, dy) \\
&= \int_R P_y\{\tau > h-u\} p(u, x-y) dy
\end{aligned}
$$

(见(4)式)。由于密度 $p(u, x, y)$ 对 x 是连续的，而这积分在任意有限区域内一致收敛，所以这积分对 x 也连续。

概率 $P_x\{\sigma > h\}$（它和 x 有关）是由连续函数 $P_x\{A_u\}$ 构成的单调递减序列的极限，所以对任意点 a 和任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对 $|x-a| < \delta$，有

$$
P_x\{\sigma > h\} \leqslant P_a\{\sigma > h\} + \varepsilon. \tag{20}
$$

由于 $P_a\{A_u\}$ 单调收敛到 $P_a\{\sigma > h\}$，可以选一个 $u > 0$ 使得

$$
P_a\{A_u\} \leqslant P_a\{\sigma > h\} + \frac{\varepsilon}{2}.
$$

当确定了这个 u 之后，对连续函数 $P_x\{A_u\}$，就可以找到一个 $\delta > 0$，使得当 $|x-a| < \delta$ 时有

$$
P_x\{A_u\} \leqslant P_a\{A_u\} + \frac{\varepsilon}{2}.
$$

由于 $P_x\{\sigma > h\} \leqslant P_x\{A_u\}$，所以当 $|x-a| < \delta$ 时，不等式(20)成立。

如果条件(19)在点 a 成立，那么，$P_a\{\sigma > h\} = 0$，且由不等式(20)，有

$$
\lim_{x \to a} P_x\{\sigma > h\} = 0.
$$

又因为 $\tau \leqslant \sigma$，故

$$
P_x\{\tau > h\} \leqslant P_x\{\sigma > h\},
$$

因此，$P_x\{\tau > h\}$ 也趋于零。这证明了点 a 是正则的。

可以证明，逆命题也是成立的，即：如果对在点 a 连续的任意有界函数 $\varphi(y)$，条件(13)都成立，那么点 a 是正则的，且在这点上 $\sigma=0$ 的概率为 1（见习题）.

在判别式(19)的基础上，下一节给出边界点正则性的一个简单的几何判别法.

§6. 0-1 律，正则性的充分条件

现在证明，概率 $P_a\{\sigma>0\}$ 除了零和 1 外不能再取别的值(0-1 律)

首先要证，对任意固定的 $h>0$，随机点 $X(h)$ 不依赖于事件 $\{\sigma>0\}$ 发生与否. 这是因为，事件 $\{\sigma>0\}$ 的发生是由任意小的时间间隔 $[0, s]$ 中的轨道状况所决定的. 由于过程的轨道是连续的，所以当 s 很小时点 $X(s)$（即使它的分布与事件 $\{\sigma>0\}$ 有关）在起始点 a 附近的概率是很大的，另一方面，质点在下一段时间 $[s, h]$ 内的位移与时间 s 之前过程的状况无关，特别地，与事件 $\{\sigma>0\}$ 和 $\{\sigma=0\}$ 的发生无关. 随机向量 $X(h)$ 是一个"几乎是常数"的向量 $X(s)$ 与一个独立于事件 $\{\sigma>0\}$ 的向量 $X(h)-X(s)$ 的和，因而它与事件 $\{\sigma>0\}$ 也"几乎独立"，令 $s\to 0$ 取极限，就得到：点 $X(h)$ 与事件 $\{\sigma>0\}$ "完全"独立.

为了把这直观的推理变成精确的数学描述，我们注意，由马尔可夫性，对任意区域 Γ，有

$$P_a\{\sigma>0,\ X(h)\in\Gamma\}=\int_R p(h-s,\ y,\ \Gamma)\mu(dy),\quad (21)$$

其中 μ 是给定了附加条件 $\sigma>0$ 后，质点在时刻 s 时的分布，即

$$\mu(\Gamma')=P_a\{\sigma>0,\ X(s)\in\Gamma'\}.$$

在积分式(21)中，令 $s \downarrow 0$ 而取极限，(21)式的被积函数是有界的，且由(4)式易见它对变量 y 和 s (其中 $h > s$) 是连续的. 测度 $\mu(\Gamma')$ 不超过 $p(s, a, \Gamma')$，所以在以 a 为圆心的任意圆 K 的外部，当 $s \downarrow 0$ 时它趋于零. 这表示此测度在圆 K 上趋于全测度 $\mu(R)$，即趋于数 $P_a\{\sigma > 0\}$. 取一个充分小的圆 K 和数 $s > 0$，把积分(21)分为在 K 上的积分和在 K 的余集 $\bar{K}$ 上的积分两部分. 在 K 上的积分中，被积函数与数 $p(h, a, \Gamma)$ 只差一个任意小的量，而测度 $\mu(K)$ 几乎等于 $P_a\{\sigma>0\}$. 在 $\bar{K}$ 上的积分不超过 $\mu(\bar{K})$，因而近似为零. 所以整个积分(21)与乘积 $P_a\{\sigma> 0\} \cdot p(h, a, \Gamma)$ 只差一个任意小的量，故等于这个乘积. 于是有

$$P_a\{\sigma > 0, X(h) \in \Gamma\} = P_a\{\sigma > 0\} \cdot P_a\{X(h) \in \Gamma\}, \quad (22)$$

即向量 $X(h)$ 和事件 $\{\sigma > 0\}$ 独立.

此外，由马尔可夫原理(即给定现在，将来与过去的事件彼此独立)可知，由于"现在的"事件 $X(h)$ 与"过去的"事件 $\{\sigma > 0\}$ 无关，所以任一"将来"事件也和这个事件无关，即，在时间 h 之后，由这过程决定的任一事件都和事件 $\{\sigma > 0\}$ 独立.

形式上，根据马尔可夫性，对过程 $Y(t) = X(h + t)$，$t \geq 0$ 的任意事件 A，其概率为

$$\int_R P_y\{A\}p(h, a, dy),$$

把它与事件 $\{\sigma > 0\}$ 合起来后，由(22)式知这概率为

$$\int_R P_y\{A\}P_a\{\sigma > 0\}p(h, a, dy)$$

$$= P_a\{\sigma > 0\}\int_R P_y\{A\}p(h, a, dy).$$

因此，事件 $\{\sigma > 0\}$ 的概率与过程 $Y(t)$ 的事件 A 的概率是相乘的关系，于是这些事件相互独立.

由于可以把 h 取得任意小，故可用那些与 $\{\sigma > 0\}$ 独立的"将来"事件来构造 $\{\sigma > 0\}$ 这事件本身. 由此得到，这个事件与它自身独立，即满足 0-1 律.

特别地，考虑事件 $A(h, t) = \{$在时间间隔 $[h, t]$ 内轨道在区域 G 内$\}$. 如前所述，对 $h > 0$，事件 $A(h, t)$ 和 $\{\sigma > 0\}$ 独立，即

$$P_a\{\sigma > 0, A(h, t)\} = P_a\{\sigma > 0\} \cdot P_a\{A(h, t)\}. \quad (23)$$

显然，当 h 递减时，事件 $A(h, t)$ 也递减，且当 $h \downarrow 0$ 时，它们的极限是事件$\{$在任意的时间间隔$[h, t]$中，轨道在区域 G 内，其中 $0 < h < t\}$，它和事件 $\{\sigma > t\}$ 等价. 于是，在(23)式中令 h 趋于零，并注意到 $\{\sigma > 0, \sigma > t\} = \{\sigma > t\}$，即得

$$P_a\{\sigma > t\} = P_a\{\sigma > 0\}P_a\{\sigma > t\}.$$

现在令 t 趋于零，有

$$P_a\{\sigma > 0\} = P_a\{\sigma > 0\}^2.$$

显然，这时 $P_a\{\sigma > 0\}$ 只能等于零或 1.

注意，对事件 $\{\sigma > 0\}$ 刚刚证明过的 0-1 律是由 Blumenthal 给出的下述结果的一个特例[1]：如果事件 A 发生与否由 Wiener 过程在任意小的时间间隔 $[0, t]$ $(t > 0)$ 的状况所决定，那么事件 A 的概率等于 0 或 1.

在一般情形下，这个规律的证明与证明事件 $\{\sigma > 0\}$ 时的方法是同样的. 先来证明任意一个只与时间 h 后的 Wiener 质点的状况有关的事件 A_h 是与 A 独立的，然后用形如 A_h 的事件来近似地表示 A（这时必须要考虑事件的可测性），由此得出 $P_x\{A\} = P_x\{A\}^2$，故 $P_x\{A\} = 0$ 或 1.

设 a 是一非正则点. 由上节给出的正则点判别法，有概

---

1) 可参阅[3]第 5 章 §6.

率 $P_a\{\sigma>0\}>0$. 事实上，由 0-1 律知，在这类点上，有

$$P_a\{\sigma>0\}=1.$$

由上导出判别正则点的充分条件：区域 G 边界 L 上的一点 a 是正则的，如果 a 是在这个区域之外的某个三角形 S 的顶点（图13），如果点 a 不是正则的，那么从点 a 出发的质点在某个正的时间间隔 $(0,\sigma)$ 内处于 G 的内部的概率为 1，因而肯定在三角形 S 之外，由于 Wiener 过程对旋转的不变性，对以 a 为心旋转 S 而得到的任一三角形来说，上述结论仍然成立．因此，根据我们的假设，这意味着，在点 a 的质点跑到 a 的邻域之外的概率为 1．这和 Wiener 轨道的连续性矛盾．因此，点 a 实际上是正则的．

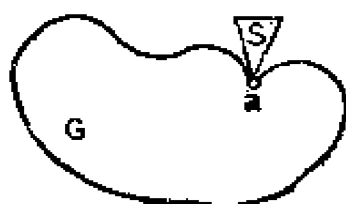


图 13

刚刚证明的这个判别法表明，对很大一类区域，特别是由光滑曲线围成的任意区域，其边界点都是正则的．

在三维空间中，为了使一个边界点是正则的，只需这个点是某个完全在这区域外的四面体的顶点；而在一维情形，这点是一线段的端点．

§7. Dirichlet 问题

现在可以得出某些结论了．我们已经证明，如果 G 是一个具有正则边界的区域，φ 是边界上任一有界连续函数，那么

公式

$$f(x) = M_x\varphi(X(\tau)) \tag{24}$$

在区域 G 内定义了一个调和函数，它在边界上的值等于 φ.

因此，我们不仅对很大一类区域证明了 Dirichlet 问题的解的存在性，而且也得到了这个解的一个明确的表达式，用这个表达式既可以对解作定性分析，也可以对它作数值计算．在这种情况下，利用随机数表来模拟 Wiener 过程，然后计算函数 φ 在边界上质点离开的随机位置上的均值． 构造 Brown 运动的办法之一是用点格上的随机徘徊来模拟它． 当然也可以用其它方法． 这里所说的方法，其好处在于，它使我们对不连续的边界函数以及非正则边界的区域，也能处理 Dirichlet 问题的解．

另一方面，(24)式也可以用来对离开概率作分析上的研究． 在许多情况下，Dirichlet 问题的解是能直接求出来的，因而可以得到与 Wiener 过程轨道的状况有关的有用信息．

众所周知，在有界区域 G 内 Dirichlet 问题不能有两个不同的解(这是因为，调和函数在区域边界上取到它的极大和极小值)． 对无界区域 G 来说，Dirichlet 问题的解一般不唯一(对 $l \geq 3$ 甚至有界解也不唯一)． 最初并不清楚这些解中哪个是与 $f(x)$ 一样的，然而可以证明， 如果连续的边界函数 $\varphi(y)$ 是非负的且边界是正则的，那么(24)式给出的是 Dirichlet 问题的最小非负解．

为此，设 S 是以原点为心的一个圆，G' 是区域 G 位在 S 内的那部分 (图 14)[1]． 由于圆 S 上任意点都可以是 G' 外一个三角形的顶点，所以区域 G' 的边界也是正则的． 用 τ' 表示 Wiener 轨道首次离开 G' 的时间． 考虑 G' 边界上的函数

1) 一般说，G' 可能由几个不连通的区域组成，但这不影响我们的讨论．

φ'，这里当区域 G'' 和 G 的边界一致时，φ' 等于 φ，在 G' 的其它边界点上它等于零．令

$$f'(x) = M_x\varphi'(X(\tau')) \quad (x \in G'). \tag{25}$$

设 $g(x)$ 是 G 上一非负调和函数，在边界上等于 $\varphi(y)$．利用有界区域 G' 的 Dirichlet 问题解的唯一性可知

$$g(x) = M_x g(X(\tau')) \quad (x \in G').$$

由于 $\varphi'(y) \leqslant g(y)$ 在区域 G' 的边界上处处成立，故根据上式，有

$$f'(x) \leqslant g(x) \quad (x \in G'). \tag{26}$$

注意，如果轨道 $X(t)$ 在离开圆 S 之前离开区域 G，那么对它有 $\tau' = \tau < \infty$，且函数 φ' 和 φ 在点 $X(\tau')$ 处的值相

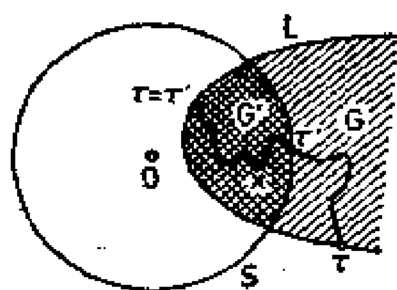


图 14

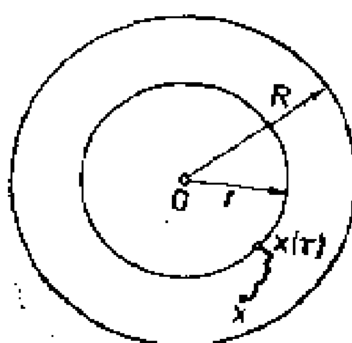


图 15

等．对轨道的其它所有点来说，或者 $\varphi'(X(\tau'))$ 等于零（如果 $\tau' < \infty$，$\tau' \neq \tau$）或者它没有定义（如果 $\tau' = \infty$）．我们用

$$f'(x) = M'_x\varphi(X(\tau))$$

来代替(25)式，其中 M 上的"$'$"表示，这不是在使 $\tau < \infty$ 的整个轨道上积分，而只是在使 $\tau' = \tau < \infty$ 的那些轨道上积分．显然，给定无穷多个不断扩充的圆 S 时，事件 $\{\tau' = \tau < \infty\}$ 将递增到事件 $\{\tau < \infty\}$．因此，对任意 $x \in G$，$M'_x\varphi(X(\tau))$ 趋于 $M_x\varphi(X(\tau))$． 这表示对不等式(26)取极限，在整个区

域 G 上就得到 $f(x) \leqslant g(x)$.

下面考虑一些利用(24)式的例子，其中或是借助微分方程来研究 Wiener 过程，或是用概率的想法来得到 Dirichlet 问题的一个解.

开始先考虑函数 $\ln|x|$，除了点 $x=0$ 外它处处满足 Laplace 方程. 这个函数在以点 0 为心的任何圆上是常数. 一个比较简单的办法就是取常数 c_1, c_2 使函数

$$f(x)=c_1\ln|x|+c_2$$

在环带 $G=\{r<|x|<R\}$ 的外边界上等于零，而在内边界上等于1(图 15). 用 τ 表示轨道首次离开环带 G 的时间，根据(24)式有

$$f(x)=M_xf(X(\tau))=1\cdot P_x\{|X(\tau)|=r\}+0\cdot P_x\{|X(\tau)|=R\}\quad(x\in G),$$

于是我们发现，$f(x)$ 表示从内圆处离开环带 G 的概率. 按上述要求选定了 c_1 和 c_2 后，就有

$$f(x)=\frac{\ln R-\ln|x|}{\ln R-\ln r}. \tag{27}$$

对 $l\geqslant 3$ 维的空间，情况是类似的，但要求用函数 $1/|x|^{l-2}$ 来代替函数 $\ln|x|$. 这时由球层 $\{r<|x|<R\}$ 的内边界离开它的概率为

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{|x|^{l-2}}-\dfrac{1}{R^{l-2}}}{\dfrac{1}{r^{l-2}}-\dfrac{1}{R^{l-2}}}. \tag{28}$$

由(27)和(28)式，可以得到许多有趣的结果.

比如，在平面或空间中的 Wiener 轨道概率为 1 地不会

到达和轨道起始点不同的定点 a[1].

为确定起见，我们讨论平面情形. 显然，对任意 $R > |x| > r > 0$，由点 x 出发，在到达外圆之前到达 0 点的概率，不大于到达外圆之前到达内圆的概率 $f(x)$. (27) 式表明，对固定的 $R > |x| > 0$ 和充分小的 $r > 0$，概率 $f(x)$ 将任意接近于零. 因此，对任意初始位置 $x \neq 0$，质点在离开以 0 为心、$R > |x|$ 为半径的圆之前到达点 0 的概率等于零.

如果质点从点 $x \neq 0$ 出发，在到达 0 点之前穿过任意确定半径 $R > |x|$ 的圆的概率为 1，那么它将概率为 1 地在到达 0 之前穿过半径为 $n|x|(n = 2, 3, \cdots)$ 的所有圆. 然而，它的轨道是连续的，因而在一段有限的时间内质点穿过所有这些圆是不可能的. 所以，从点 $x \neq 0$ 出发的质点永不到达点零的概率为 1. 当然，对平面上任意其它的定点 a，这结果也成立.

利用第一章的术语，可以说，对平面上和空间中的 Wiener 过程，单点集是非常返的. 反之，在一维情形，容易证明，每一个点都是常返的(见习题). 为了比较，回想一下，对点格上的随机徘徊，直线和平面上的单点集是常返的，而在空间中它是非常返的.

平面上连续与离散随机徘徊之间的这个差别，是因为，连续平面上的一个点是一个比离散点格上的点更"稀疏"的集. 如果不去考虑到达一个点，而是考虑到达任意一个圆的内部，那么连续和离散之间的类似就又恢复了，即平面上的 Wiener 质点概率为 1 地进入任意一个半径大于零的圆内.

为此，我们回到图 15 的环带. 从 x 出发，在某个时刻进入半径为 r 的圆内的概率大于等于在到达半径为 R 的圆周上

---

1) 由这结果易知，它也概率为 1 地不会回到起始点.

之前进入半径为 r 的圆内的概率 $f(x)$，然而根据(27)式当 $R\to\infty$ 时，$f(x)\to 1$. 所以，进入这内圆的概率为 1.

在平面上画可数多个圆，使得平面上的任一点都在任意小半径的一个圆中，可知，**轨道** $X(t)$ **概率为 1 地在平面上处处稠密.**

在 $l\geqslant 3$ 维的空间中，根据(28)式，有

$$\lim_{R\to+\infty} f(x)=\frac{r^{l-2}}{|x|^{l-2}}.$$

这个极限等于从 x 出发，在某个时刻进入半径为 r 的球 U 中的概率. 事实上，事件{轨道在它首次离开半径为 R 的球之前进入球 U}，当 $R\to\infty$ 时，单调收敛到事件{轨道进入球 U}.

知道了轨道进入任一球的概率小于 1，就可断言，**当** $t\to\infty$ **时，概率为 1 地有** $|X_t|\to\infty$（在第一章 § 3，对离散的情形，曾有过类似的结果).

作为另一个例子，我们用概率的想法来求平面上作随机徘徊的 Brown 质点，当它首次离开一给定的直线时其位置的分布. 这使我们能够对半平面上的 Dirichlet 问题给出一个解.

首先注意，如果质点是从一个已知角的平分线上开始运动(图 16)，那么根据对称性，在它首次离开这个角时，以相等的概率通过每一边. 由于质点进入角外任意圆 K 的概率为 1，所以它离开这角的概率也等于 1. 因此，从这个角的每一边首次离开的概率都等于二分之一(我们已知，到达角顶的概率等于零).

利用这个简单的想法，在给定了质点的初始位置后，容易求出质点从角的某一边离开这角（在这之前并未从另一边离开)的概率. 考虑某个等于 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 的角 AOB. 设 x 是这角内的任一点，$P(x)$ 是从 x 出发通过 OB 边离开角

AOB 的概率(图 17). 我们将证明，在每一条从 O 出发的射线上，$P(x)$ 是一常数且等于 θ/α，其中 θ 是角 AOx. 当 $\theta=0$ 和 α 时，这断言是显然的. 如前所述，如果对 $\theta=\theta_1$ 和 $\theta=\theta_2$，公式 $P(x)=\theta/\alpha$ 成立，那么对 $\theta=(\theta_1+\theta_2)/2$ 这公式也

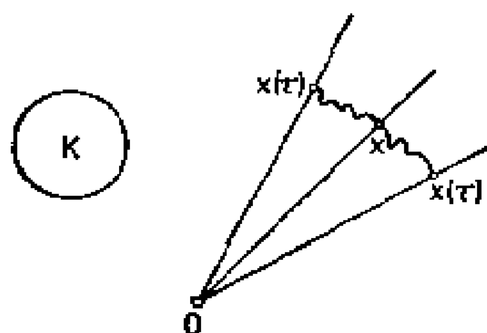


图 16

成立;事实上，根据全概率公式，对满足 $\theta=(\theta_1+\theta_2)/2$ 的 x，有

$$P(x)=\frac{1}{2}\frac{\theta_1}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\theta_2}{\alpha}=\frac{\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)}{\alpha}.$$

这样依次递推下去确立了公式 $P(x)=\frac{\theta}{\alpha}$ 对 $\theta=\alpha/2$ 成立，从而对 $\theta=\alpha/4$, $\theta=3\alpha/4$, $\cdots$ 成立，即对任意 $\theta=k\alpha/2^n$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 2^n$; $n=1, 2, 3, \cdots$) 公式成立.

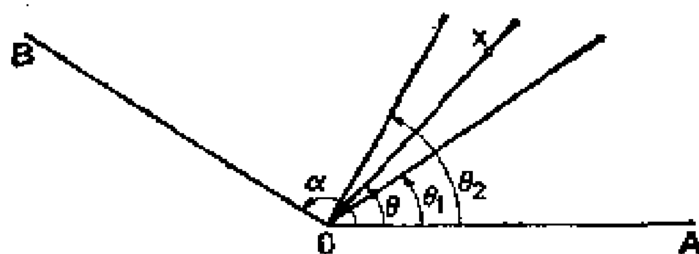


图 17

对任意 n，角 AOB 中任意点 x 都在某两条射线 $\theta_1=k\alpha/2^n$ 和 $\theta_2=[(k+1)/2^n]\alpha$ 之间，把从 x 出发在这两条射线处离开的概率分别记作 q_1 和 $q_2(q_1+q_2=1)$，于是

$$P(x)=q_1\frac{k}{2^n}+q_2\frac{k+1}{2^n}=\frac{k}{2^n}+\frac{q_2}{2^n}$$

$$=\frac{\theta_1}{\alpha}+\frac{q_2}{2^n}.$$

当 $n\to\infty$ 时，得到

$$P(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_1}{\alpha}+\frac{q_2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_1}{\alpha}=\frac{\theta}{\alpha}.$$

现在考虑从上半平面出发的 Wiener 轨道，首次从 x_1 轴离开的时间 τ（图 18）．用符号 ξ 表示点 $X(\tau)$ 的横坐标，对任意固定的 y，事件 $\{\xi<y\}$ 表示轨道离开以 $M(y,0)$ 为顶点、MP 为边的平角 NMP．于是有

$$P_x\{\xi<y\}=\frac{\theta}{\pi},\tag{29}$$

其中 θ 是角 NMx． 这个角可以用点 x 的坐标 x_1，x_2 表示为关系式

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_2}{x_1-y}$$

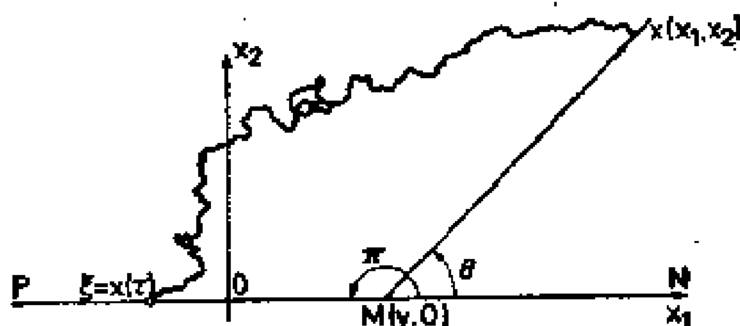


图 18

把(29)式对 y 微分，可求出 ξ 点的分布密度

$$p(x_1, x_2; y) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{x_2^2 + (y - x_1)^2}.$$

这就是 Cauchy 分布密度.

知道了密度 $p(x_1, x_2; y)$，立刻可以写出一个函数 $f(x)$，它在上半平面调和且在 x_1 轴上等于一给定的函数 $\varphi(y)$，即

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) p(x_1, x_2; y) dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2 \varphi(y) dy}{x_2^2 + (y - x_1)^2}. \qquad (30)$$

利用在保角变换下调和函数仍变成调和函数这一事实，由(30)式可以得到平面上不同区域中 Dirichlet 问题的解，特别是能导出 Poisson 公式，它给出了圆上 Dirichlet 问题的解.

假设 x_1, x_2 的平面是复平面 $z = x_1 + ix_2$，把(30)式重新写成

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I_m \left(\frac{1}{y - z} \right) \varphi(y) dy \quad (I_m z > 0)$$

的形式. 函数 $w = (z - i)/(z + i)$ 把上半平面 $x_2 > 0$ 映射到一个单位圆，利用这个变换，经过某些计算，我们得到一个函数 $u(w)$，其表达式

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

(复变量的 Poisson 积分)，它在 $|w| < 1$ 的圆内调和且在这圆的边界上取值为 $\varphi(y)$.

§8. Poisson 方程的概率解

最后，我们来计算轨道从区域 G 离开的平均时间 $m(x)=$

$M_x\tau$. 我们来说明，在一般条件下，函数 $m(x)$ 在区域 G 内是 Poisson 方程

$$\Delta m = -2 \tag{31}$$

的一个解，它在区域的边界上等于零. 由于它类似于离开概率的问题，我们只给出有关推理的一个梗概.

我们围绕起始点 a 画一个半径为 ρ 的小圆 K，使它整个都在 G 内（图 9），把时间 τ 分成两部分：即首次离开 K 的时间 τ_K 与从圆周 C 到达区域 G 的边界 L 所需的时间 $\tau-\tau_K$. 由强马尔可夫性易知

$$M_a(\tau-\tau_K)=\int_C m(x)\mu(dx),$$

其中 μ 是圆周 C 上的均匀分布（见 § 4 (10) 式的推导）. 在 § 2，我们曾看到 $M_a\tau_K=\rho^2/2$，因此

$$m(a)=\frac{1}{2}\rho^2+\int_C m(x)\mu(dx). \tag{32}$$

设区域 G 是有界的. 由 § 2 的结果可知，函数 $m(x)$ 是有限的. 直接验证表明，函数 $-x^2/2=-(x_1^2+x_2^2)/2$ 满足 (32)式. 因此，函数 $n(x)=m(x)+(x^2/2)$ 满足方程

$$n(x)=\int_C n(y)\mu(dy),$$

这与函数 $f(x)=M_x\varphi(x(\tau))$ 满足(10)式是一样的. 因此，函数 $n(x)$ 在区域 G 内调和. 由于 $\Delta(-x^2/2)=-2$，所以平均时间 $m(x)$ 在 G 内满足(31)式. 对区域 G 的边界点，显然有 $m=0$. 因此，可以期望，当 x 趋于边界时，$m(x)$ 趋于零. 这个命题对正则边界点是成立的且可用 § 5 的方法来证明.

于是，**在具有正则边界的有界区域** G **中，$m(x)$ 是 Poisson 方程(31)的一个解且它在边界上为零**. 自然，这是唯一的解.

对具有正则边界 L 的无界区域 G 来说，用一组扩充的圆重复 § 7 的讨论，可以证明，$m(x)$ 在 L 上为零，在区域 G 内是

方程(31)的最小正解(如果这样的解存在的话).

§9. 无穷小算子和特征算子[1)]

我们已知在 Wiener 过程 $X(t)$ 和 Laplace 算子

$$\Delta=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

之间有密切联系. 现在希望对这种联系能了解的更深入些.

先考虑一些例子. 假设函数 $X(t)$ 描述了某种效果, 其中 t 在区间 (a, b) 内变化. 这时存在一个当这过程取不同路程而得到的不可预报集. 但是, 如果只考虑在一小段时间 $(t_0, t_0+\Delta t)$ 内函数 $X(t)$ 的增量, 并且约定忽略 (比 Δt) 高级的无穷小量, 那么我们能用线性函数 $X'(t_0)(t-t_0)$ 来代替 $X(t)-X(t_0)$, 前者用一个数 $X'(t_0)$ 来描述. 这个数由 t_0 的任意小邻域中 $X(t)$ 的状况完全决定, 因此是过程在时间 t_0 处的**无穷小特征**. 这个考虑在这里之所以很重要是因为, 只要对所有的 t 这些无穷小特征都已知, 那么这个效果就可以在大的范围内重新给出.

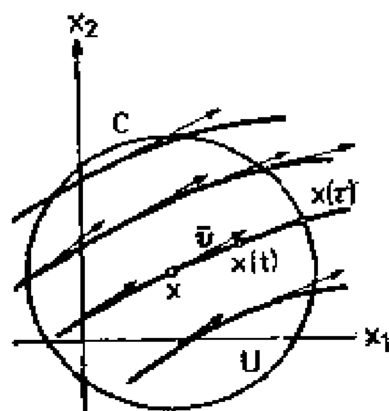


图 19

下面考虑平面上流体的一个平稳(对时间不变)的光滑流. 平面上布满了流体质点的轨道, 过每一点只有一条轨道 (图 19). 当知道了一个质点在某一瞬时的位置, 对它将来的路程就可以给出一个很好的预报, 这如同我们已经知道了这质点以前的所有轨道那样 (在研究 Wiener 过程中, 我们已遇

1) 对这节问题的详细讨论读者可参阅 [4].

见过这个性质，那时称它为马尔可夫性）．对这个流的无穷小特征，我们有这个流的速度场（在这平面的每个点上给出该点的速度向量就得到该速度场）．当然，有时不用速度场而研究它对应的**算子** A 是更方便的．这算子可如下得到：设 $X(t)$ 是质点的轨道，它在时刻 $t=0$ 处于定点 x 我们不仅要研究这轨道的坐标 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的变化，而且也要研究任一（光滑）函数 $f(x)=f(x_1, x_2)$ 的变化．经过一段时间 t，质点由 x 到点 $X(t)$，而函数 $f(x)$ 有一增量 $f(X(t))-f(X(0))=f(X(t))-f(x)$．因此，函数 f 沿着轨道在点 x 的变化速度 $Af(x)$ 等于

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(X(t))-f(x)}{t}&=\frac{df(X(t))}{dt}\\&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}\\&=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial f}{\partial x_2},\end{aligned}\tag{33}$$

其中 v_1 和 v_2 是给定点 x 上的速度向量 $\bar{V}$ 在 x_1 和 x_2 轴上的投影，且导数也是在这一点上取的．称算子

$$A=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

为这过程的无穷小算子．显然，给定 A 和给定向量 $\bar{V}$ 是等价的．对各种初始条件解方程

$$\frac{df}{dt}=Af,$$

于是，整个流的任意（光滑）函数 f 在大的范围内在时间上的变化可以由 A 重新给出．

试从这个观点来探讨 Wiener 过程．对于 Wiener 过程，在时间 t 内质点的位移 $Y(t)=X(t)-X(0)=X(t)-x$ 是随机的且（在平面上）有概率密度

$$p(t, y) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2t}}$$

(见(3)式). 因此，比值 $[f(X(t)) - f(t)]/t$ 也是一个随机变量，而且，一般说来，它的极限概率为 1 地不存在(见习题). 因此，把上一段的讨论逐字搬到 Wiener 过程上来，所得到的随机向量和随机算子 A 的概念都是没有意义的. 如果把随机变量 $[f(X(t)) - f(x)]/t$ 用它的均值来代替，那么情况就不一样了. 这时我们得到 Wiener 过程的无穷小算子[1]:

$$Af(x_1, x_2) = \lim_{t\to 0} \frac{M_x f(X(t)) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{2\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \cdot e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2t}} dy_1 dy_2 - f(x_1, x_2)\right]. \tag{34}$$

在许多情形中，另一种不是关于时间而是关于空间的极限更加适用. 我们来考虑平面平稳流的例子. 给定点 x 的一个邻域 U，考虑在首次离开 U 的时刻 τ 时质点所处的位置(图 19)，这是 U 的边界上的某一点 $X(\tau)$. 在时间 τ 内，函数 $f(X(t))$ 的增量为 $f(X(\tau)) - f(x)$. 把邻域 U 缩小到点 x，我们可以把函数 f 在点 x 的变化速度定义为

$$\lim_{U \downarrow x} \frac{f(X(\tau)) - f(x)}{\tau},$$

1) 为了完整地给出无穷小算子 A，必须给出它的定义域 D_A. 设 C 是一族有界连续函数. 令 $f \in D_A$，如果 $f \in C$，$Af \in C$ 且 $[M_x f(X(t)) - f(x)]/t$ 关于 x 一致收敛到 $Af(x)$，这时我们得到的是所谓强无穷小算子 A；如果 D_A 是所有满足 $Af \in C$ 的 $f \in C$，这时如果在每一点都存在极限，且如果对所有 x 和 $t>0$，量 $[M_x f(X(t)) - f(x)]/t$ 有界，那么我们得到一个弱无穷小算子 A.

这个极限显然与(33)式中的极限一致. 在 Wiener 过程的情形中,首次离开 U 的时刻通常是随机的,质点在时刻 τ 的位置也是随机的. 如同建立算子 A 的公式那样并取这些随机变量的均值,然后把 U 缩减到 x, 我们得到算子

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{M_x f(X(\tau)) - f(x)}{M_x \tau}, \tag{35}$$

称它为过程的**特征算子**[1]. 如果 U 是以点 x 为心 ρ 为半径的圆,那么,由前可知,

$$M_x f(X(\tau)) = \int_C f(y)\mu(dy), \tag{36}$$

其中 μ 是圆形区域 U 的边界 C 上的均匀分布,且有

$$M_x \tau = \frac{1}{2}\rho^2.$$

如 §4 最后所示,积分(36)等于

$$f(x) + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) + \int_C \alpha(y)\mu(dy),$$

其中 $|\alpha| \leqslant k\rho^3$ (假设函数 f 是充分光滑的). 把这些值代入(35)式,得到

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{2}\Delta f(x). \tag{37}$$

进一步的分析表明, 对于二次连续可微函数 f 和任意形状的邻域 U, 极限(35)存在且等于 $\frac{1}{2}\Delta f$.

于是, **描述 Wiener 过程在一给定点附近状况的特征算子,除了差一常数因子外,和 Laplace 算子相同**[1].

---

1) 所有使极限 (35) 式存在且在每点 x 有限的函数 f 都属于特征算子 $\mathfrak{A}$ 的定义域 $D_{\mathfrak{A}}$. 有时对 f 和 $\mathfrak{A}f$ 加上有界性和连续性的条件把 $D_{\mathfrak{A}}$ 缩小,更为方便.

2) 这里只对二次连续可微的函数来研究算子 $\mathfrak{A}$.

如果我们计算（34）式中的极限，可知它也等于 $1/2\Delta f(x)$. 这个一致性并非偶然. 已经证明，这对非常广泛的一类马尔可夫过程成立.

我们已经看到，对 Wiener 过程概率特征的分析与 Laplace 算子的研究紧密相关. 自然会问，除了 Laplace 算子外，还有什么微分算子可以给出类似的理论，换句话说，什么样的微分算子是特征(无穷小)算子呢?

设 $X(t)=\{X_1(t),X_2(t)\}$ 是平面上的 Wiener 过程，令

$$\left.\begin{aligned} Y_1(t) &= X_1(0)+c_{11}[X_1(t)-X_1(0)] \\ &\quad + c_{12}[X_2(t)-X_2(0)]+b_1t \\ Y_2(t) &= X_2(0)+c_{21}[X_1(t)-X_1(0)] \\ &\quad + c_{22}[X_2(t)-X_2(0)]+b_2t \end{aligned}\right\}, \tag{38}$$

其中 c_{ij} 和 b_i 是任意实常数. 这时可以证明，过程 $Y(t)=\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ 的特征(无穷小)算子与微分算子

$$L=\frac{1}{2}\left[a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] + b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{39}$$

相同，其中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

现在假定 c_{ij} 和 b_i 是 x 的光滑函数[1]. 在这种情形下，用一个比较复杂的办法，也可以构造一个马尔可夫过程，其特征算子(定义在二次连续可微函数上)由(39)式给出. 这种类型的过程称为带有生成算子 L 的**扩散过程**. 这节开始讨论的平稳流也可以看作是扩散过程的一个特殊情况（$a_{ij}=0$ 的情形）.

---

1) 实际上，这些系数只需是 Hölder 意义下连续的.

容易看出，由(40)式定义的矩阵 $\{a_{ij}\}$ 是对称的且满足条件

$$a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+a_{22}\lambda_2^2\geqslant 0\text{，对一切 }\lambda_1,\lambda_2.$$

如果更强一些的条件

$$a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+a_{22}\lambda_2^2>0\text{，对 }\lambda_1^2+\lambda_2^2>0$$

成立，那么算子 L 称为椭圆算子．本章中对 Laplace 算子所给出的概率理论可推广到任意具有充分光滑系数的椭圆微分算子上．

习　　题

Kolmogorov-Chapman 方程

1. 验证由(3)式给出的密度 $p(t,y)$，对任 $s,t>0$，$y\in R$ 满足方程

$$p(t+s,y)=\int_R p(t,x)p(s,y-x)\,dx.$$

并用概率论的思想导出这个方程．

提示． 把增量 $X(t+s)-X(0)$ 表示为 $[X(s)-X(0)]+[X(t+s)-X(s)]$ 的形式．

一维情形中的离开概率和平均离开时间

在习题 2—6 中，变量 $p(a;x)$ 和 $q(a;x)$ 分别表示从点 $x\in[0,a]$ 开始运动的 Wiener 质点，在首次离开区间 $(0,a)$ 的时刻位于它的右端点和左端点的概率，而 $m(a;x)$ 是质点从 $(0,a)$ 区间离开所需的平均时间．这些习题的解并不依赖于 §4—§8 的一般结果．

2. 在函数 $p(a;x)$ 的图象上，对应于等距离点 $0=x_1<x_2<\cdots<x_n=a$ 的点处于同一直线上．

提示． 见第一章 §1 的讨论．

3. 函数 $p(a;x)$ 关于 x 是单调的．

提示． 对 $0\leqslant x<y\leqslant a$，有 $p(a;x)=p(y;x)p(a;y)$．

4. $p(a; x) = x/a$, $q(a; x) = (a - x)/a$.

5. 已知 $m(a; a/2) = c_1(a/2)^2$（见 § 2），证明关系式 $m(a;x) = c_1x(a - x)$.

提示. 假定 $x < a/2$. 画出从点 $a/2$ 出发的轨道，从离开 $(0, a)$ 的平均时间中减去离开 $(x, a - x)$ 的平均时间.

6. 质点由点 $x \neq 0$ 到达点 0 的概率等于 1，但到达零点的平均时间是无穷.

提示. 在习题 4 和 5 中，令 $a \to \infty$ 而取极限.

带有反射和吸收的一维 Wiener 过程

如果把直线上 Wiener 过程 $X(t)$ 的轨道中，对 $X(t) < a$ 的那些部分以点 a 为心对称地反射，而对 $X(t) \geqslant a$ 的那些部分不变，那么我们得到半直线 $[a, +\infty)$ 上一个在 a 点左反射的 Wiener 过程 $Y(t)$. 类似地，可以定义在点 a 的右反射. 对于 $a<b$，一个从点 $x \in [a, b]$ 出发的轨道，可以首先在点 a 左反射，所得到的轨道再在点 b 右反射，这样得到的轨道再在点 a 左反射，然后新的轨道再在 b 点右反射，这样一直无限作下去，最后得到的是区间 $[a, b]$ 上在点 a 和 b 有反射的Wiener过程 $Y(t)$. 如果 Wiener 轨道在首次到达点 a（点 a 或 b 中的任一个），就总停留在这点，那么这是一个在点 a（在点 a 或 b）有吸收的 Wiener 过程 $Z(t)$.

如果从 x 出发的质点，经过时间 $t > 0$ 后，到达任一不包含吸收边界点的区间 Γ 的概率 $p(t, x, \Gamma)$ 等于

$$p(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, dy,$$

那么称函数 $p(t, x, y)$ 为这过程的转移密度. 整个直线上的 Wiener 过程的转移密度为

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \tag{41}$$

（见 § 1）.

7. 在零点左反射的 Wiener 过程，其转移密度为

$$p(t, x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}+e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right]$$

$$(x, y\geqslant 0).$$

提示. 对任一区间

$$\Gamma\subset[0,+\infty),$$

有 $\{Y(t)\in\Gamma\}=\{X(t)\in\Gamma\cup\Gamma'\}$，其中 Γ' 由 Γ 对零点反射所得到.

8. 在 0 点左反射且在 a 点右反射的 Wiener 过程的转移密度等于

$$p(t, x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}}+e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}}\right]$$

$$(x, y\in[0, a]).$$

提示. 如同上一问题那样讨论，可以把 $P_x\{Y(t)\in\Gamma\}$ 表示成转移密度(41)的积分的级数. 通过变量替换可以把整个积分化成一个单个的区间 Γ 上的积分，再利用所有被积函数都是正的这一点，于是可以交换求和与积分的次序.

下述直观上显然的命题可用来计算具有吸收状态的 Wiener 过程的转移密度. 如果 τ 是满足 $X(\tau)=a$ 的马尔可夫时间，μ 是随机时间 τ 的分布，那么对任意 $t>0$ 和任一区间 Γ，有

$$P_x\{\tau\leqslant t, X(t)\in\Gamma\}=\int_0^t p(t-s, a, \Gamma)\mu(ds). \tag{42}$$

这命题来自强马尔可夫性，它是可以严格证明的.

9. 如果点 x 和区间 Γ 位于零点的同一侧，而 τ 是首次到达零点的时间，那么

$$P_x\{\tau\leqslant t, X(t)\in\Gamma\}=P(t, -x, \Gamma).$$

提示. 对初始状态 $-x$，事件 $\{\tau\leqslant t, X(t)\in\Gamma\}$ 和 $\{X(t)\in T\}$ 一致. 然后再用(24)式.

10. 在半直线 $[0, +\infty)$ 上以零点为吸收壁的 Wiener 过程 $Z(t)$ 的转移密度等于

$$p(t, x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}-e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right]$$

$$(x, y>0),$$

提示. 用上一题的记法，有

$$P_x\{Z(t)\in\Gamma\}=P_x\{\tau>t, X(t)\in\Gamma\}$$

(区间 Γ 不包含零点).

11. 给定初始状态 $x>0$，首次到达零点的时间 τ 的分布密度为

$$p(x, t)=\frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-x^2/2t}\quad(t>0). \tag{43}$$

提示. 用习题 9 的记法，有

$$P_x\{\tau\leqslant t\}=P_x\{Z(t)=0\}=1-\int_0^\infty p(t, x, y)\,dy.$$

在所得到的区间中作代换 $y\pm x=\sqrt{2t}\,u$，再对 t 微分.

用(43)式，通过积分可以得到习题 6 的结果.

12. 设 τ_0 是 $X(t)$ 首次到达零点的时间，σ_1 是 τ_0 之后首次到达 $a>0$ 的时间，τ_1 是 σ_1 之后首次到达零点的时间，σ_2 是 τ_1 之后首次到达 a 的时间，等等．对初始状态 $x>0$，时间 τ_n 的分布与从点 $-2na-x$ 出发首次到达零点的时间的分布相同，而时间 σ_n 的分布与从 $2na+x$ 出发首次到达 a 的时间的分布相同.

提示. 所有的差 $\sigma_{i+1}-\tau_i$ 和 $\tau_i-\sigma_i$ 是相互独立的，而且它们都与质点在点 a 向右(或向左)移动一个单位所需的时间同分布．随机变量 τ_0 与这些差独立且与质点在点 a 向右(或向左)移动一个单位所需的时间同分布．因此，无须把和 $\tau_n=\tau_0+(\sigma_1-\tau_0)+(\tau_1-\sigma_1)+\cdots+(\tau_n-\sigma_n)$ (或类似的和 σ_n) 的分布重新排列，就可以断言，所有这些位移在同

一方向上.

13. 如果 $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \cdots$ 是习题 12 中的随机时间序列,而 $\rho_0, \pi_1, \rho_1, \pi_2, \rho_2, \cdots$ 是从首次到达 a 时开始算起, 到达点 a 和 0 的时间的类似序列,那么

$$\{\tau_n \leqslant t; \rho_n \leqslant t\} = \{\sigma_{n+1} \leqslant t \text{ 或 } \pi_{n+1} \leqslant t\},$$

$$\{\sigma_n \leqslant t; \pi_n \leqslant t\} = \{\tau_n \leqslant t \text{ 或 } \rho_n \leqslant t\}.$$

14. 用习题 12 和 13 的记法,对任一事件 A, 有

$$P_x\{A, (\tau_0 \leqslant t \text{ 或 } \rho_0 \leqslant t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} [P_x\{A, \tau_n \leqslant t\} + P_x\{A, \rho_n \leqslant t\}] - \sum_{n=1}^{\infty} [P_x\{A, \sigma_n \leqslant t\} + P_x\{A, \pi_n \leqslant t\}].$$

提示. 利用上一题的结果, n 次应用公式 $P\{B \cup C\} = P\{B\} + P\{C\} - P\{B \cap C\}$ 且让 n 趋于无穷. 所以能取极限, 是因为轨道的连续性使得在一段有限的时间从 0 转到 a 只能有有限次. 因此,概率 $P_x\{\tau_n \leqslant t\}$ 和 $P_x\{\sigma_n \leqslant t\}$ 趋于零.

15. 点 0 和 a 为吸收态的 Wiener 过程 $Z(t)$ 的转移密度等于

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-x+2na)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x+2na)^2}{2t}}\right] \quad (x, y \in (0, a)). \tag{44}$$

提示. 我们有

$$P_x\{Z(t) \in \Gamma\} = P_x\{X(t) \in \Gamma, \tau_0 > t, \rho_0 > t\}$$

(区间 Γ 不包含点 0 和 a). 现在要求不断地应用习题 14、(42)式、习题 12 和对于时间 ρ_n 和 π_n 的类似结果, 以及习题 9 的提示 (这里叙述的结果也可以应用于初始点和集 Γ 在点 a 的一侧而不是点 0 的一侧的情形). 在 $P_x\{Z(t) \in \Gamma\}$ 的表

达式中，求和与积分的次序可以交换，这是因为对任 $t>0$，$0<x<a$，级数(44)关于 y 一致收敛。

16. 对初始状态 $x\in(0,a)$，首次离开区间 $(0,a)$ 的时间 τ 的分布密度为

$$p(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(x+2na)e^{-\frac{(x+2na)^2}{2t}}\right.$$
$$\left.+(2na+a-x)e^{-\frac{(2na+a-x)^2}{2t}}\right]. \qquad (45)$$

特别地，

$$p\left(\frac{a}{2},t\right)=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)e^{-\frac{(2k+1)^2a^2}{2t}}$$
$$(t>0). \qquad (46)$$

提示. 比较习题 11，由于级数(45)对 $t\geqslant t_0>0$ 一致收敛，所以可以对 t 逐项微分。

常数 C_l 的计算

借助于(46)式可以从分析上求出质点从一区间离开的平均时间，因而可以确定常数 c_1 的值(见 § 2 结尾部分)。知道了 c_1 之后，对任意 l 计算 c_l 就简单了。但是不能直接通过逐项积分来计算

$$\int_0^\infty tp\left(\frac{a}{2},t\right)dt,$$

这是因为它每一项的积分都发散。

17. 用著名的积分(见 [19] 卷 II, p. 460)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2-\beta/x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\sqrt{2\alpha\beta}}\quad(\alpha,\beta>0),$$

计算

$$\int_0^\infty te^{-\lambda t}p\left(\frac{a}{2},t\right)dt\quad(\lambda>0),$$

其中密度 p 由(46)式给出.

答案: $\dfrac{a e^{-a\sqrt{\lambda/2}}(1-e^{-a\sqrt{2\lambda}})}{\sqrt{2\lambda}(1+e^{-a\sqrt{2\lambda}})^2}$.

18. 在直线上从点 $a/2$ 出发的 Wiener 轨道,到达点 0 或点 a 的平均时间等于 $a^2/4$. 因此, $c_1 = 1$.

19. 在平面上从一个半径为 r 的圆的圆心出发的 Wiener 质点离开这圆周的平均时间等于 $r^2/2$, 因此, $c_2 = 1/2$.

提示. 设 τ_1 是 $X(t)$ 首次到达圆 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ 的时间, τ_2 是 $X(t)$ 首次到达直线 $x_1 = \pm r$ 之一的时间.

于是

$$M_0\tau_1 = M_0\tau_2 - M_0(\tau_2 - \tau_1) = M_0\tau_2 - M_\mu\tau_2,$$

其中 μ 是圆周 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ 上的均匀分布. 由于坐标 $X_1(t)$ 表示一个一维 Wiener 过程,所以可以用习题 5 和 18 来计算 $M_\mu\tau_2$.

20. 把习题 19 的讨论推广到 l 维的情形,验证 $c_l = 1/l$.

提示. 如同习题 19, 问题归结为在一个 $(l-1)$ 维的球上对量 $X_1(2r - x_1)$ 求平均,不难计算这个平均. 例如, 利用 §4 最后的办法.

Wiener 轨道的不可微性

只需讨论直线上的 Wiener 过程.

21. 假设对区间 $(0, T)$, $T > 0$ 中每一个 t, 对应着 x 轴上的一区间 Γ_t. 如果

$$P_0\{X(t) \in \Gamma_t\} \geqslant \varepsilon > 0,\ 0 < t < T,$$

那么,对从零出发的轨道 $X(t)$, 存在一个任意接近零的正时刻 t, 使得

$$X(t) \in \Gamma_t$$

概率为 1 地成立.

提示. 用 0-1 律.

22. 比值

$$\frac{X(t)-X(0)}{t}$$

概率为 1 地取任意区间 $0<t<\varepsilon(\varepsilon>0)$ 中的所有实数值.

提示. 把前一题用于区间

$$\Gamma_t=(\sqrt{t},+\infty) \text{ 和 } \Gamma_t=(-\infty,-\sqrt{t}).$$

正则性的充分必要条件

在 §5 我们曾看到，边界点 a 正则的一个充分条件是

$$P_a\{\sigma=0\}=1 \tag{47}$$

(σ 是在零时刻之后首次离开区域 G 的时间)，而且也知道它的一个必要条件是

$$\lim_{\substack{x\in G\\ x\to a}} M_x\varphi(X(\tau))=\varphi(a) \tag{48}$$

对定义在区域边界上的任意有界且在点 a 连续的函数 φ 成立 (τ 是首次离开 G 的时间). 在习题 23—26 中要证明，这两个条件是充分必要的. 这需要从 (47) 式导出 (48) 式. 在任意 $l\geqslant 2$ 维的空间中，所有的讨论仍然正确，但为了更直观起见，考虑 $l=2$ 的情形.

23. 从点 a 出发的轨道 $X(t)$，对 $t>0$ 不再回到点 a 的概率为 1.

提示. 先观察 $[t_0,+\infty)$ 这段时间，其中 $t_0>0$，应认识到在这段时间从 x 出发在某个时间到达 a 的概率 $(x\neq a)$为零.

24. 如果 $P_a\{\sigma=0\}=0$，求一个以点 a 为圆心半径大于零的圆形区域 K，使得

$$P_a\{X(\sigma)\in K\}<\frac{1}{2}.$$

提示. 当圆 K 缩减到点 a 时，$P_a\{X(\sigma)\in K\}$趋于 $P_a\{X(\sigma)$

$= a\}$.

25. 在上题的条件下，在以 a 为圆心的任意一个位于圆形区域 K 内部的圆周 C 上，都存在一点 x，使得

$$P_x\{X(\tau) \in K\} < \frac{1}{2}.$$

提示. 如果 μ 是从点 a 出发在首次到达圆周 C 时质点的分布，那么

$$P_a\{X(\sigma) \in K\} \geqslant \int_C P_x\{X(\tau) \in K\}\mu(dx).$$

26. 如果 $P_a\{\sigma = 0\} < 1$，那么存在一个连续有界函数 φ，对它(48)式不成立.

提示. 利用 0-1 律，有

$$P_a\{\sigma = 0\} = 0,$$

且只须取一个函数 φ，它在圆 K 外等于零，在 K 内不大于 1，在点 a 等于 1 即可.

一个更强的正则性充分判别法

27. 如果平面区域 G 的边界点 a 是区域外的一条线段的端点，那么点 a 是正则的.

提示. 用 0-1 律. 如果在任意小的正的时间之后，轨道与以 $X(0)$ 为端点画出的射线相交的概率等于零，那么，在某个正的时间之后，轨道处于直线 $x_2 = X_2(0)$，的某一侧的概率为 1.

28. 如果三维区域 G 的边界点 a 是区域外的一个三角形的顶点，那么点 a 是正则的.

29. 在下面的论证中找出错误来. 对任意 $r > 0$，事件 $A_r = \{$平面上轨道 $X(t)$ 进入以点 0 为心，r 为半径的圆 K_r 内部$\}$ 的概率为 1，且这些事件一个包含另一个，令 $r \downarrow 0$ 取极限，我们得到，轨道概率为 1 地到达 0 点.

离开区域的平均时间

在习题 30—33 中，$m(x)$ 表示从点 x 出发离开平面区域 G 的平均时间，而 a 是区域 G 的一个正则边界点.

30. 如果区域 G 有界，那么函数 $m(x)$ 有界.

31. 如果区域 G 有界，那么，当 $x \to a$ 时，$m(x) \to 0$.

提示. 当 $x \to a$ 时有 $P_x\{\tau > \varepsilon\} \to 0$ 且

$$m(x) \leqslant \varepsilon + P_x\{\tau > \varepsilon\} \cdot \sup_x m(x)$$

(τ 是首次离开区域 G 的时间).

32. 离开圆形区域 K 的平均时间等于从起始点 $x \in K$ 到这圆的圆周的最大距离与最小距离乘积的一半（见习题 5).

33. 如果 $m(x) = \infty$ 至少在一点成立，那么在整个区域 G 上有 $m(x) = \infty$.

提示. 由 Poisson 积分（见 § 7）可知，对任意的圆 $C \subset G$ 和 C 内任意点 x, y，存在一个正的常数 c 使得

$$\mu_y(\Gamma) = P_y\{X(\tau) \in \Gamma\} > cP_x\{X(\tau) \in \Gamma\} = c\,\mu_x(\Gamma),$$

其中 τ 是轨道首次到达 C 的时间，Γ 是这圆上的任一弧. 因此，有

$$m(y) = M_y\tau + \int_C m(z)\mu_y(dz)$$

$$> c\int_C m(z)\mu_x(dz) = c[m(x) - M_x\tau],$$

其中 $M_x\tau < \infty$.

第三章　最优停止问题

§1. 最优选择问题

我们从下面的问题着手．假定我们以随机的顺序检查 n 个对象，希望从中选出最好的一个．要求每一个对象检查完后，必须决定是接受它还是拒绝它，而且不允许再回去考虑先前已被拒绝的对象．

当然，后一个条件并不总是现实的．下面两个例子是现实的，例如，考虑一个汽车旅行者，他希望停在沿途中最舒服或者最便宜的旅馆中而又不打算走回头路（假设他知道这些旅馆的个数但不知道它们的好坏），或者考虑一个想结婚的聪明姑娘，她希望在所有向她提出求婚的人中真正能选出最好的一个，在后一个例子中，不能再回到已拒绝的对象这一假定是合情合理的．另一方面，决定者事先知道对象的总数 n 这一约定，在这里显得有些是人为的．

现在我们来更精确地阐述这个问题． 假定有 n 个对象，根据它们的质量按某种确定的方式进行排列．例如，可以把这些对象想象成分布在一条直线上的点，点越靠右，它所表示的对象的质量越"好"．用 a_1 表示我们碰到的第一个对象．由于这些对象以一种随机的次序被检查，于是把这 n 个点中哪一个当作点 a_1 的概率都是一样的．完全同样的看法，点 a_2 以相等的概率为剩下的 $n-1$ 个点中的任意一个．按照我们碰到它们的次序，继续给这些点编号，最后得到某个集 a_{i_1}, a_{i_2}, $\cdots$, a_{i_n}，这里 $n!$ 个可能的排列都以相等的概率出现．这

个排列是逐渐为我们所了解的，即在第二次检查之后，只知道 a_1 和 a_2 的相对位置，而在第 k 次检查之后，知道了 a_1，a_2，…，a_k 的相对位置（读者可以认为在点 a_1，a_2，…，a_k，…，a_n 处有指示灯，一个接一个地在闪光）．问题是为了把这 n 个点中的最右点在它首次出现的一瞬间认出来，这就需要给出一种方法，用它能以最大的概率达到目的．

为了更好地理解这个问题，考虑某些简单的选择办法．例如，可以选取第一个点 a_1，显然，这时猜中最右点的概率等于 $\frac{1}{n}$（因此当 $n \to \infty$ 时，它趋于零）．假如选取 a_2 或 a_3 等，其结果也完全一样．

初看起来，似乎用任何一种选择办法，当 $n \to \infty$ 时，成功的概率都将趋于零，然而情况并非如此．为了简单起见，假定点的个数 n 是偶数，我们放过前 $\frac{n}{2}$ 个点，然后选取落在所有前面点的右边的第一个点．按照这种策略，如果最好的对象恰好在序列 $a_1, \cdots, a_n$ 的后一半，而第二好的对象在这序列的前一半，那么肯定可以达到目的，而这两个最好的对象是如此安排的概率等于 $[(n/2)/n] \cdot [(n/2)/(n-1)] > \frac{1}{4}$，因此不论偶数 n 多么大，都存在一种策略，使成功的概率大于 $\frac{1}{4}$．

假定点 $a_1, \cdots, a_k$ 在直线上的位置已知（见图 20，其中 $k=4$），点 $a_1, \cdots, a_k$ 把直线分成 $k+1$ 个区间，我们希望确定下一个点 a_{k+1} 落在每个区间的概率．a_{k+1} 在某一固定区间的出现对应着 $k+1$ 个点 $a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 的一个确定的排列，由于所有这些点是等可能的，所以任何一种这样排列的概率为 $k+1$ 个元素全排列数的倒数 $\frac{1}{(k+1)!}$．类似地，点 $a_1 \cdots, a_k$ 对应于它们在直线上给定位置的排列的概率等于

$\frac{1}{k!}$. 因此，在点 $a_1, \cdots, a_k$ 相对位置已知的条件下，点 a_{k+1} 落在这 $k+1$ 个区间中任一个的条件概率等于 $[1/(k+1)!]/(1/k!)=\frac{1}{k+1}$，它与点 $a_1, \cdots, a_k$ 是如何排列的无关. 于是，下一个被检查的点落人由已存在的点所划分成的区间中任一个区间内的概率相同，而与这些点出现的次序无关.

如果下一个点 a_k 落在某个先前已被检查过的点的左边，显然它不是最右点. 因此，只需从落在先前点 $a_1, \cdots, a_{k-1}$ 右边的那种 a_k 点中来选择，称这种点为极大点. 显然点 a_1 总是

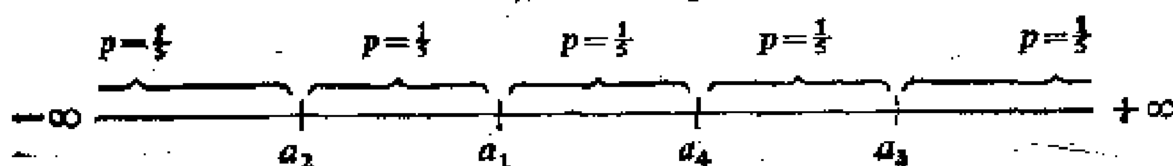


图 20

极大点，正像所有点 $a_1, \cdots, a_n$ 的最右点是极大点一样，所要找的点是这种次序下的最后极大点.

当下一个极大点 a_k 出现时，必须作出决定，是取这一点，还是等下一个. 这时点 $a_1, \cdots, a_k$ 的相对位置是已知的，其中 a_k 是最右点. 由于现在只能从点 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 中来选，所以这种决定只依赖于关于点 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的相对位置的预报. 在点 $a_1, \cdots, a_k$ 的位置已知的条件下，除了点 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的各种排列的条件概率外，没有任何东西能影响这种决定. 我们将证明，这些条件概率实际上只与指标 k 有关，而完全不受点 $a_1, \cdots a_{k-1}$ 的相对位置的影响，由此确立这样的事实：当一个极大点 a_k 出现时，必须作出的决定只依赖于这点的下标 k（自然，应认为所有点的个数 n 为已知).

在直线上点 $a_1, \cdots, a_n$ 是按它们出现的次序编号的. 我

们把已经出现的点 $a_1, \cdots, a_n$ 按它们在直线上从左到右的位置重新编号为 $A_1, \cdots, A_k$. 由于 a_k 是极大点，所以 a_k 就是 A_k（图 21）. 给出点 $a_1, \cdots, a_k$ 的相对位置等价于指定了点 $A_1, \cdots, A_k$ 出现的次序. 注意到这样一些特定事件，即点 A_k

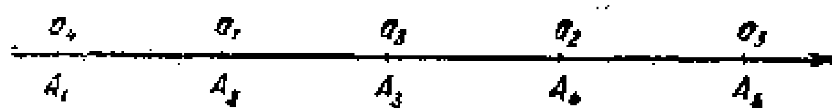


图 21

$a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的相对位置以及相对于点 $A_1, \cdots A_{k-1}$ 的位置与点 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 的出现次序无关，于是确定了这样的事实：点 $A_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的任意排列和点 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 出现的次序无关. 这是根据前面已确立的事实，即每个点依次以相同的概率落入直线上被先前出现的点所划分成的区间内，特别地，点 a_{k+1} 落入 $(-\infty, A_1), (A_1, A_2), \cdots, (A_k, +\infty)$ 中任意一个区间内的概率都等于 $\frac{1}{k+1}$，它与点 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 出现的次序无关；点 a_{k+2} 落入以点 $A_1, \cdots, A_k$ 和 a_{k+1} 为端点的任意区间内的概率都等于 $\frac{1}{k+2}$，它与点 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 出现的次序无关；等等. 把这些概率相乘，得到点 $A_1, \cdots, A_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的任一排列（其中点 $A_1, \cdots, A_k$ 按大小次序排列）的概率等于

$$\frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \cdots \frac{1}{n},$$

它与点 $A_1, \cdots, A_{k-1}$ 出现的次序无关. 这就证明了我们最初的断言.

例如，令 $n=10$，点 $a_1, \cdots, a_{10}$ 排列如图 22，极大点是 a_1，a_3，a_6 和 a_8. 当点 a_1 出现时，我们必须只在它的下标等于 1 这个事实的基础上来作出决定；当点 a_3 出现时，只根据它的下标等于 3 这个事实来决定(当然，前提是在此之前没有停止)；等等.



图 22

因此，为了作出最优的决定[1]，只需分析极大点的下标. 把这些下标按递增的次序记成 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$，$\cdots$，如上所述 $X(0)=1$. 正如这些下标 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$，$\cdots$，的个数是随机的一样，这些下标本身也是随机的. 这些下标没有一个大于 n，下标 $X(i)$ 中最后(最大的)一个是最右点 a_k 的下标，必须以最大概率猜中它. 猜的办法依赖于这样的事实，即当下一个随机变量 $X(i)$ 出现时，只需根据它的取值来宣布，或者这个 $X(i)$ 就是最后一个，或者要等下一个(特别地，最优选择并不要求知道先前的极大点的下标 $X(0)$，$X(1)$，$\cdots$，$X(i-1)$ 是什么值以及这些下标有多少个).

为了把这个问题完全用序列 $\{X(i)\}$ 的语言来描述，我们进一步来寻找这个随机序列所服从的概率规律. 首先说明，所有这些随机变量 $X(0)$，$X(1)$，$\cdots$，构成一**马尔可夫链**. 这表示在前面所有随机变量 $X(0)$，$X(1)$，$\cdots$，$X(i)$ 的值都已知的前提下，事件 $X(i+1)=l$ 的条件概率实际上只依赖于前一个变量 $X(i)$ 取的值 k[2]. 于是，假定已知 $X(0)=1$，

1）由于只存在有限多个供选择的策略，所以在它们之中肯定存在一个最优的策略.

2）更确切地说，这是齐次马尔可夫链的定义. 在一般非齐次的情形中，上述条件概率还与时间 i 有关；本书不讨论非齐次马尔可夫链.

$X(1)=b, \cdots, X(i)=k$，这等于说点 $a_1 a_2, \cdots, a_k$ 的极大点是 $a_1, a_b, \cdots, a_k$. 换句话说，已知点 a_k 是极大点，还知道点 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 的相对位置，现在事件 $X(i+1)=l$ 表示点 $a_{k+1}, \cdots, a_{l-1}$ 处于点 a_k 的左边，而点 a_l 处于它的右边. 因此，如果已知 $X(0)=1, X(1)=b, \cdots, X(i)=k$，那么事件 $X(i+1)=l$ 可以用点 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_l, \cdots, a_n$ 的相对位置来描述. 然而在前面我们已经知道，如果点 a_k 是极大点，那么在点 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 相对位置已知的条件下，与点 $a_k, \cdots, a_n$ 相对位置有关的任何事件的条件概率，事实上只与下标 k 有关. 于是条件概率

$$P\{X(i+1)=l \mid X(0)=1, X(1)=b, \cdots, X(i)=k\}$$

除 l 以外只与 k 有关(可能与整个点数 n 有关)，称这个条件概率为马尔可夫链的**转移概率**，记作 $p(k, l)$.

变量 $X(0), X(1), \cdots$ 取值为 $1, 2, \cdots, n$. 把这些值组成的集(称为**状态空间**)用一个作随机徘徊的质点所经过的点来表示是很方便的(图 23).

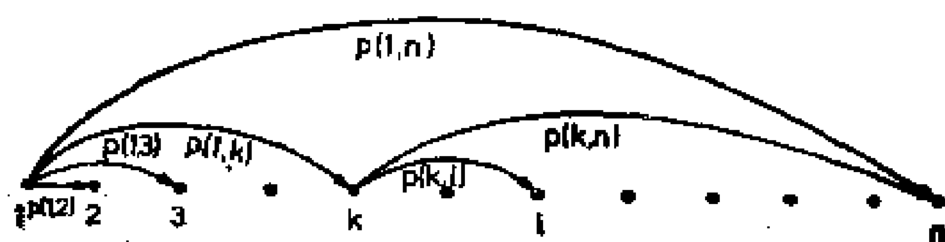


图 23

在初始时刻质点位于点 1，然后以 $p(1, i)$ 的概率跳到 i 点. 一般说来，如果质点在某个特定时刻正巧处于点 k，那么不论它是怎样到达点 k 的，下一步它将以概率 $p(k, l)$ 跳到点 l.

这里，$\sum_k p(k, l)$ 可以小于 1，于是把差 $1-\sum_k p(k, l)$ 理解为质点消失的概率是合理的. 质点从 k 转移到 l 表示在极大点 a_k 之后，下一个极大点将是 a_l，而质点消失将表示不再有极大点了.

现在来计算转移概率 $p(k, l)$. 根据条件概率定义

$$p(k, l)=\frac{P\{X(i)=k, X(i+1)=l\}}{P\{X(i)=k\}}$$
$$(k, l=1, 2, \cdots, n),$$

显然，$l \leqslant k$ 时，$p(k, l)=0$（在图 23 中只能从左向右跳）；$l>k$ 时，事件 $\{X(i)=k, X(i+1)=l\}$ 表示点 a_k 与 a_l 是所有点 $a_1, \cdots, a_l$ 中最右边的两个点（其中 a_l 在 a_k 右边），考虑到所有这些点都是等可能的，这事件的概率等于 $1/l(l-1)$，完全类似地有 $P\{X(i)=k\}=1/k$，因此，

$$p(k, l)=\frac{k}{l(l-1)} \quad (1 \leqslant k<l \leqslant n).$$

下面着手阐述最优选择办法.

如上所述，这个方法可以这样得到：对每个下标 k，指明究竟是在这个数上停止，还是继续往下. 显然，只需确定需要停止的那些下标组成的子集 Γ. 数 $1, 2, \cdots, n$ 有 2^n 个子集（包括空子集与整个集），其中每一个子集都对应着某一个策略，我们的问题是在这 2^n 个策略中找出最好的策略.

当然，除了上面所列举的办法外，还有许多其他的策略. 例如，用 ξ 表示 $X(0), X(1), X(2), \cdots$ 中首次大于或等于 k 的值（因而，当 $X(0)<\cdots<X(i-1)<k, X(i) \geqslant k$ 时，$\xi=X(i)$）. 我们可以设想这样一种策略，规定在 ξ 后面那个数上停止，即在 $X(i+1)$ 处停止. 这种类型的策略显然不是最优的，然而我们将用它们来研究最优选择程序.

让我们来计算在点 $X(i)=k$ 停止的条件下，盈利的条件

概率 $q(k)$：

$$q(k)=1-\sum_{l=k+1}^{n}p(k,l)=1-\sum_{l=k+1}^{n}\frac{k}{l(l-1)}$$

$$=1-k\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{l-1}-\frac{1}{l}\right)=\frac{k}{n}$$

$$(1\leqslant k\leqslant n).$$

为了进行比较，在同样的情形下只是多取一步，即停止在数 $X(i+1)$ 上，我们来求条件盈利概率 $q'(k)$. 根据全概率公式，

$$q'(k)=\sum_{l=k+1}^{n}p(k,l)q(l)=\sum_{l=k+1}^{n}\frac{k}{l(l-1)}\frac{l}{n}$$

$$=\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=q(k)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$(k<n),$$

$$q'(k)=0 \qquad (k=n).$$

由于 k 增加时，和 $\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ 单调递减，所以比值 $q'(k)/q(k)$ 也单调递减，且当 $k=n$ 时变成零. 因此，在数列 $1, 2, \cdots, n$ 的某一段 $\{k_n, k_{n+1}, \cdots, n\}$ 上条件 $q'(k)\leqslant q(k)$ 成立.

我们来证明集 $\Gamma=\{k_n, \cdots, n\}$ 对应着最优策略（换句话说，只要 $X(i)<k_n$ 就应继续浏览下去，一旦出现 $X(i)\geqslant k_n$ 时就停止）.

下面假设对象的个数 $n\geqslant 3$. 对于 $n=1$ 时，通常没有选择问题，对 $n=2$ 时，停止在这两个对象的任一个上，成功的概率都是一样的，显然在这两种情形下，集 $\Gamma=\{k_n, \cdots, n\}$

都给出一个最优策略。 但是由于 $n=1$ 或 2 时，$k_n=1$，所以下面的讨论不适用于这两种情形。

对 $n\geqslant 3$ 时，

$$q'(1)=q(1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$>q(1),$$

因此，$k_n>1$。 这表示要求我们在数 $1=X(0)$ 停止的策略不是最优的。事实上，这类策略成功的概率为 $q(1)$，而选择 $X(1)$ 这个数的策略将以更大的概率 $q'(1)$ 获取盈利。

于是，只需要在放过第一个下标的策略中来寻找最优方案。 因为当 $2\leqslant k\leqslant n$ 时，$p(1,k)>0$，所以等到任意下标 k 出现的这种策略 A，其概率 $P_A(k)$ 为正。假定策略 A 指定我们停在数 $k<k_n$，于是，在质点到达 k 之前与 A 重合而在到达 k 之后再多取一步的策略 A' 显然是比 A 更好。事实上，用策略 A' 比用策略 A 成功的概率多出 $P_A(k)[q'(k)-q(k)]$。因此，最优策略不能在点 $1,\cdots,k_n-1$ 停止。

现在对 k 的值从大到小地应用归纳法，从而说明最优策略 A 要求在区段 $\{k_n+1,\cdots,n\}$ 的点上立刻停止。显然，在这个区段的点上具有严格的不等式 $q'(k)<q(k)$。 如果要求策略 A 在数 n 不停，那么指定在点 n 停止，其它方面与策略 A 相同的策略 A'，其成功的概率相对 A 来说将增加 $P_A(n)$，故策略 A 将不是最优的，因此，对 $k=n$ 时我们的论断成立。假定对点 $k+1,k+2,\cdots,n$ $(k\geqslant k_n+1)$ 已证，如果指定策略 A 在数 k 不停，那么要求我们在点 k 停止而其它方面与 A 相同的策略 A' 将比 A 更好。事实上，在到达点 k 时，策略 A' 应立刻停止，而策略 A 根据归纳假设应再多取一步停止，因此，A' 比 A 成功的概率大 $P_A(k)[q(k)-q'(k)]$，故策略 A 不是最优的，所以 A 也应该在点 k 停止。

现在确立了这样的事实：最优策略 A 不许停在点 $1,\cdots,k_n-1$，相反地，要求停在点 $k_n+1,\cdots,n$. 如果当 $k=k_n$ 时，不等式 $q'(k_n)<q(k_n)$ 严格成立，于是归纳程序可以继续用到 $k=k_n$，从而证实策略 A 也要求在点 k_n 停止. 但是，如果对某个 n，有 $q(k_n)=q(k_n)$，这时运用同样的论证可知，怎样到达点 k_n 是无关紧要的. 在这种情况下，为了方便起见，把 k_n 放在 Γ 中[1].

于是，选择的最优方法是，在前 k_n-1 个对象处都不停，然后选择第一个比以前都好的对象.

数 k_n 是满足 $q'(k)=q(k)$ 的最小整数，即满足

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\leqslant 1$$

的最小整数. 因此，k_n 由双重不等式

$$\frac{1}{k_n}+\cdots+\frac{1}{n-1}\leqslant 1<\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\cdots+\frac{1}{n-1} \tag{1}$$

来确定

下面来求利用最优策略时成功的概率. 先来计算在拒绝了前 k_n-1 个对象后，第一次出现比以前都好的对象其下标为 m 的概率 s_m. 这个事件意味着在所有点 $a_1,\cdots,a_m$ 中 a_m 是最右点且第二个最右点将是点 $a_1,\cdots,a_{k_n}-1$ 中任意一个. 由于这些对象都是等可能的，所以这事件的概率等于

---

1) 实际上，等式 $q'(k)=q(k)$ 仅对 $n=2$ 和 $n=1$ 成立. 因为在数 $k,k+1,\cdots,n-1$ 中只有一个能被不超过 $n-1$ 的数 2 的最高次幂整除，所以和

$$s=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

通分后分子是一个奇数，对 $n>2$ 时，分母是偶数，因此和 s 将不等于 1.

$(1/m)\cdot(k_n-1)/(m-1)$. 因此，有

$$s_m = \frac{k_n-1}{m(m-1)}.$$

在这种情况下，成功的条件概率等于 $q(m)=\frac{m}{n}$，因此，一般地，一个正确决定的概率等于

$$P_n = \sum_{m=k_n}^{n} S_m q(m) = \sum_{m=k_n}^{n} \frac{k_n-1}{m(m-1)}\cdot\frac{m}{n}$$

$$= \frac{k_n-1}{n}\left(\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right). \qquad (2)$$

例如，对 $n=10$，有下表：

表 1

k	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}$	k	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}$
9	0.111	0.111	4	0.250	0.996
8	0.125	0.236	3	0.333	1.329
7	0.143	0.379	2	0.500	······
6	0.167	0.546	1	1.000	······
5	0.200	0.746			

由上表易见 $k_n=4$. 因此，必须先拒绝前三个对象，然后选择第一个比以前都好的对象. 这时成功的概率为

$$P_{10} = 0.3\cdot 1.329 = 0.399.$$

对任意的 n 只要不太大都容易作类似计算。对 n 大的值，我们给出 k_n 与 P_n 的较好的近似关系式. 对任意 $m\geqslant 2$，有

$$\ln(m+1)-\ln m = \int_m^{m+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{m} < \int_{m-1}^{m}\frac{dx}{x}$$

$$= \ln m - \ln(m-1),$$

把这些不等式从 $m=k$ 到 $m=n-1$ 求和，得到

$$\ln\frac{n}{k}<\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\ln\frac{n-1}{k-1},$$

由这些估计及不等式(1)，有

$$\ln\frac{n}{k_n}<1<\ln\frac{n-1}{k_n-2},$$

因而

$$\frac{n}{e}<k_n<\frac{n}{e}+\left(2-\frac{1}{e}\right).$$

由于在长为 $2-\frac{1}{e}$ 的区间内，整数不能超过两个，所以对任意 n，上述不等式确定的 k_n 误差不会大于 1. 对大的 n 在计算 k_n 时，误差 1 对正确选择的概率影响不大.

由不等式(1)易见，和 $\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ 与 1 的差小于 $1/(k_n-1)$. 由于当 $n\to\infty$ 时，$k_n\to\infty$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

因此，由(2)式得到

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{k_n-1}{n}=\frac{1}{e}\approx 0.368.$$

§2. 马尔可夫链的最优停止问题

上一节通过构造一个特殊的马尔可夫链，我们解决了最优选择问题. 现在来研究任意马尔可夫链一般的最优停止问题.

假设某个质点(或系统)在每一时刻处于一个状态，这些状态形成有限或可数集 E(**状态空间**). 如果在某个时刻质点

处于状态 x，那么经过单位时间之后，质点处于状态 y 的概率为 $p(x, y)$（与它是何时以及用什么方式到达点 x 无关）．这时，我们说确定了一个转移概率为 $p(x, y)$ 的马尔可夫链．

概率 $p(x, y)$ 可以是满足条件

$$\sum_y p(x, y) \leqslant 1 \quad (x \in E)$$

的任意非负数．如果对某个 x，有 $\sum_y p(x, y) < 1$，那么量 $q(x) = 1 - \sum_y p(x, y)$ 表示处于 x 的质点下一步消失的概率．一个消失的质点不能再出现，因此这时这个链完全终止．

在第一章里所研究的点格上的随机徘徊以及最优选择问题中极大点下标的序列都是马尔可夫链的例子．在前一例子中，这个链通常不会终止，而在后一例子中，这个链在 n 步之内终止的概率为 1．

用 $X(n)$ 表示质点在时刻 n 的位置．假设我们观察轨道 $X(0), X(1), \cdots, X(n), \cdots$，并能在任何时刻 n 停止移动的质点．如果在停止的时刻质点处于点 x，那么我们得到盈利 $f(x)$，其中 f 是一已知函数．如果我们不停止这个过程（或者因为它自己终止了，或者因为我们等待无穷长的时间），那么盈利为零．我们希望知道如何能使盈利最优．

下面把问题的提法阐述得更清楚一些．首先描述所有可能的停止时间 τ．一般说来，时间 τ 是随机的，因为它依赖于质点的随机轨道．但是它不是任意的整数值随机变量．事实上，在时刻 τ，我们不知道 τ 以后过程的状态会如何，而且我们必须在知道了过程在时刻 τ 以前的情形下来解决这个问题．因此，我们只考虑这样一些整数值随机变量 τ，对它们来说，事件 $\{\tau = t\}$ 发生与否是由 $X(0), X(1), \cdots, X(t)$ 的值

唯一确定，这些随机时间称马尔可夫时间（Wiener 过程的马尔可夫时间已在第二章§4中讨论过了）。

和 $\sum_{t=0}^{\infty} P_x\{\tau=t\}$ 可以小于1（甚至等于0）。对此，其质点轨道上的 τ 不能确定时，通常记作 $\tau=\infty$。

典型的马尔可夫时间是首次到达集 E 的某个子集 Γ 的时间（当然，还有其它的马尔可夫时间，例如，$\tau=5$ 或 $\tau=\tau_1+2$，其中 τ_1 是马尔可夫时间，等等）。

如果选定时间 τ（换句话说，如果给定了停止这个过程的策略），于是盈利就是一个随机变量 $f(X(\tau))$。需要选取 τ，使得均值 $M_xf(X(\tau))$ 尽可能大（通常 M_x 表示质点初始位置在点 x 时的均值）[1]。为了使均值 $M_xf(X(\tau))$ 对任意 τ 有意义，必须对函数 f 加上某些限制，这里要求 f 有界就够了。

综上所述，这问题可表述如下：在一个有限或可列集 E 上，给定了一个转移概率为 $p(x, y)$ 的马尔可夫链和一个有界函数 $f(x)$，要求：1）计算变量 $v(x)=\sup\limits_{\tau}M_xf(X(\tau))$，其中 τ 表示所有可能的马尔可夫时间；2）求出满足

$$M_xf(X(\tau_0))=v(x)$$

的马尔可夫时间 τ_0。

类似于博奕论，称变量 $v(x)$ 为博奕值，而称马尔可夫时间 τ_0 为最优策略。

为了更好地领会这个问题，我们来考虑一些特殊的情况和例子。

如果在整个状态空间 E 上 $f\leqslant 0$，那么问题的解很简单；显然可以把 $\tau_0=\infty$（即永远不停止该过程）取作最优策略，且 $v(x)=0$。现在去掉这种没有意思的情形，假定

1）在计算均值 $M_xf(x(\tau))$ 时，仅对 τ 是有限的那些基本事件求和（第40页的注）。

$$\sup_x f(x) > 0.$$

其次，我们在一维点格上考虑一个随机徘徊．如我们所知(见第一章 § 1)，在这种类型的随机徘徊中，质点迟早到达任一状态 x 的概率为 1．因此，$v(x) = c$，其中 $c = \sup_x f(x)$．因为允许一直等到质点到达一个状态，使得 $f(x)$ 在这个状态时任意接近于 c． 如果在点格的一个子集 Γ 上取到值 c，那么为了得到一个最优策略，只需令 τ_0 等于首次到达 Γ 的时间．另一方面，如果 c 在任何点也取不到，那么尽管这时可以得到一个任意接近 c 的盈利，但不存在最优策略．

显然，在质点能以概率为 1 地到达所有状态的任意马尔可夫链(称这样的链为常返的)中，会看到同样的模型．

下面考虑在一条两端为吸收壁的直线段上的齐次随机徘徊(图 24)，质点在状态 1—11 以 1/2 的概率向右或向左跳到最邻近的状态，而当它到达状态 0 或 12 时，就永远呆在那里不动．在图 24 中给出了函数 $f(x)$ 的图象(为了清楚起见，把图象中相邻的点连结起来)．

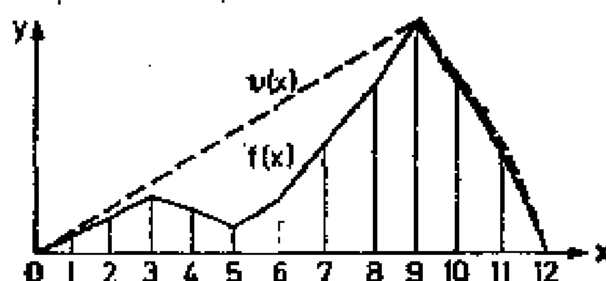


图 24

由于不可能从点 0 和 12 离开，故有 $v(0) = f(0) = 0$，$v(12) = f(12) = 0$，在这些点上无须等待，过程可以立刻停止．类似地，在状态 9 也必须立刻停止，因为在这个状态时 $f(x)$ 取到绝对极大值，故过程继续下去只能减少盈利，因此，$v(9) = f(9)$．相反地，在点 5 时，$f(x)$ 有一相对极小值，故停

止就不合适，因为即使再走一步也能得到比 $f(x)$ 更多的盈利，因此，$v(5)>f(5)$. 那么处在其它状态又如何呢？例如在点 3，其中 $f(x)$ 有一相对极大值，再等一两步显然将减少平均盈利，如果再等长一些，就有希望到达另一个或者更高的峰值的区域内，在那里盈利将比 $f(3)$ 大得多. 但是，这时有落到 0 点从而得不到盈利的危险.

以后，我们会指出在这个例子中博奕值 $v(x)$ 是大于或等于 $f(x)$ 的最小上凸函数. 换句话说，为了给出 $v(x)$ 的图象，只须在点 0 和 12 之间的某些点相对应的 $f(x)$ 图象上方连结一折线(在图 24 中 $v(x)$ 的图象是用虚线表示的). 最优策略是在首次到达使 $f(x)=v(x)$ 的点的时刻 τ_0 停止这个链.

我们将说明，在一般情形下，对一个具有有限状态的马尔可夫链，这个问题有一个类似的解. 在这种情况下，与给定的马尔可夫链有关的过分函数类将起着上凸函数的作用.

在 §1 分析的最优选择问题是一般问题的一个特例. 事实上，在 §1 构造的是一个状态为 $1,2,\cdots,n$ 的马尔可夫链 $X(i)$，并讨论一个以最大概率在终止之前立刻停止的问题. 如果质点处在状态 k，那么这个链在下一时刻终止的概率为 $q(k)=\frac{k}{n}$. 因此，用策略 τ 时成功的概率等于

$$\sum_{k=1}^{n} P_1\{X(\tau)=k\}\cdot\frac{k}{n}=M_1\frac{X(\tau)}{n}=M_1q(X(\tau))$$

(P 与 M 的下标 1 表示轨道 $X(0),X(1),\cdots$ 起始于点 1). 因此，最优选择问题变成盈利函数 $f(x)=q(x)$ 且初始状态为 $x=1$ 的最优停止问题.

§3. 过 分 函 数

我们来研究任意马尔可夫链的如下最佳停止问题，其盈

利函数 f 是针对它的最优策略是立刻停止这个过程而言的。显然，这样的函数 f 必须对任意的马尔可夫时间 τ 满足不等式

$$f(x) \geqslant M_x f(X(\tau)) \quad (x \in E). \tag{3}$$

一般说来，有无穷多个马尔可夫时间，所以直接对每一个马尔可夫时间来验证条件(3)是困难的。下面将看到，只需对 $\tau=\infty$ 与 $\tau=1$ 时，(3)式成立，那么这条件对所有其它马尔可夫时间也成立。

因为 $\tau=\infty$ 时，条件(3)变成不等式

$$f(x) \geqslant 0 \quad (x \in E). \tag{4}$$

而 $\tau=1$ 时，它变成条件

$$f(x) \geqslant Pf(x), \tag{5}$$

其中 P 是按公式 $Pf(x)=\sum_y (x, py)f(y)$ 作用的一个算子(一步推移算子)。

在第一章，我们已熟悉了(4)与(5)式，它们构成了点格上的对称随机徘徊的过分函数的定义。自然也可以对任一马尔可夫链引进类似的定义。**称满足 $Pf \leqslant f$ 的非负函数 f 为过分函数。**

我们来证明，如果 f 是过分函数，那么对任意的马尔可夫时间 τ 不等式(3)都成立[1]。

在第一章§6中，对点格上的随机徘徊已经证明了这个命题。当然，在那里把 τ 看作为首次到达某个集的时间，而且容易看出，这种论证也完全适用于任意马尔可夫时间，证明的基本想法是：把过分函数 f 表示成一个常数(它显然满足(3))与非负函数 $\varphi=f-Pf$ 的位势

$$\begin{aligned} G\varphi(x) &= \varphi(x)+P\varphi(x)+P^2\varphi(x)+\cdots \\ &= M_x[\varphi(X(0))+\varphi(X(1))+\cdots] \end{aligned} \tag{6}$$

1) 这个事实是由 Hunt[5] (在更一般的情形下)所证实。

的和。对于位势由关系式

$$M_xG\varphi(X(\tau))=M_x[\varphi(X(\tau))+\varphi(X(\tau+1))+\cdots] \tag{7}$$

得到了不等式(3)，这里(7)式的右边小于等于(6)式的右边。

对任意马尔可夫链来说，级数(6)可能发散。为了克服这个困难，引进一个"校正因子" $\alpha<1$，然后让 α 趋于 1。

令 $\varphi(x)=f(x)-\alpha Pf(x)$，$0<\alpha<1$，显然有恒等式

$$f=\varphi+\alpha P\varphi+\alpha^2P^2\varphi+\cdots+\alpha^nP^n\varphi+\alpha^{n+1}P^{n+1}f,$$

其中由(5)式知，$\varphi\geqslant 0$ 仍成立。由 $0\leqslant P^nf=P^{n-1}(Pf)\leqslant P^{n-1}f$ 知当 $n\to\infty$ 时，有 $\alpha^nP^nf\to 0$，利用这一事实可以把 f 表示为一无穷级数

$$f(x)=\varphi(x)+\alpha P\varphi(x)+\alpha^2P^2\varphi(x)+\cdots=M_x[\varphi(X(0))+\alpha\varphi(X(1))+\alpha^2\varphi(X(2))+\cdots] \tag{8}$$

(在一般情形下，对点格上的随机徘徊用同样的方式可以得到关系式 $P^n\varphi(x)=M_x\varphi(X(n))$。正如由(7)式可以推出(6)式一样，从(8)式也可以得到

$$M_x\alpha^\tau f(X(\tau))=M_x[\alpha^\tau\varphi(X(\tau))+\alpha^{\tau+1}\varphi(X(\tau+1))+\cdots] \tag{9}$$

(此式的验证留给读者)。比较(8)与(9)式可以得知

$$f(x)\geqslant M_x\alpha^\tau f(X(\tau)).$$

为了由此得到不等式(3)，只需令 α 趋于 1[1]

类似地我们来证明过分函数的一个更一般的性质：如果

---

1) 轻易地把极限移到均值符号内去会导致错误的式子。然而，在下面两种重要情形下，由 $\xi_\alpha\to\xi$ 可以推出 $M\xi_\alpha\to M\xi$：

(1) 对所有的 α，$|\xi_\alpha|<\eta$ 且 $M\eta<\infty$；

(2) $\xi_\alpha\geqslant 0$ 且 $\xi_\alpha\to\xi$ 是单调递增的。

f 是过分函数且 $\tau' \geqslant \tau$ 是两个马尔可夫时间，那么

$$M_x f(X(\tau)) \geqslant M_x f(X(\tau')) \quad (x \in E), \tag{10}$$

为了证明这个性质，要求对时间 τ 与 τ' 分别写出(9)式．因为 $\tau \leqslant \tau'$，对 τ 的级数(9)将含有对 τ' 的级数(9)中的所有项，而且还可能再含某些其它的正数项．因此，对 $0<\alpha<1$，有

$$M_x \alpha^{\tau} f(X(\tau)) \geqslant M_x \alpha^{\tau'} f(X(\tau')).$$

令 $\alpha \to 1$ 就得到(10)式．

由不等式(10)容易推出：如果 v 是过分函数且 τ 是首次到达某集 Γ 的时间，那么函数

$$h(x) = M_x v(X(\tau))$$

也是过分函数．

为了证明这个断言，用 τ' 表示在 $t \geqslant 1$ 之后质点首次到达集 Γ 的时刻．显然 $\tau' \geqslant \tau$，由此得出

$$M_x f(X(\tau')) \leqslant M_x f(X(\tau)) = h(x).$$

但是，如果第一步就使质点由 x 到 y，那么在这条件下，$M_x f(X(\tau'))$ 等于 $M_y f(X(\tau)) = h(y)$，因此，

$$M_x f(X(\tau')) = \sum_{y \in E} p(x, y) h(y) = Ph(x),$$

从而，有 $Ph \leqslant h$．

§4. 博　弈　值

如果盈利函数 f 是过分函数，那么容易看出，博弈值 v 与 f 重合．

注意，在一般情况下，如果一个过分函数 g 控制盈利函数 f，那么它也控制博弈值 v．

事实上，如果 $g \geqslant f$ 且 g 是过分函数，那么对任意策略 τ，

有

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant M_x g(X(\tau)) \leqslant g(x),$$

因此，

$$v(x) = \sup_\tau M_x f(X(\tau)) \leqslant g(x).$$

下面说明，博弈值 v 本身是一过分函数.

显然，函数 v 是非负的，对于策略 $\tau = \infty$，盈利总为零.

为了验证条件 $Pv \leqslant v$，我们给出一个使得平均盈利 $M_x f(X(\tau))$ 任意接近 $Pv(x)$ 的策略 τ，然后再利用不等式 $M_x f(X(\tau)) \leqslant v(x)$.

任取 $\varepsilon > 0$ 且用 $\tau_{\varepsilon,y}$ 表示满足

$$M_x f(X(\tau_{\varepsilon,y})) \geqslant v(x) - \varepsilon \quad (y \in E)$$

的策略（对任意的 y，马尔可夫时间 $\tau_{\varepsilon,y}$ 的存在性可由博弈值的实际定义得到）. 假定策略 τ 是先走一步，如果这一步使得质点到达状态 y，那么再用策略 $\tau_{\varepsilon,y}$，更确切地说，如果 $X(1) = y$，那么 $\tau = 1 + \tau_{\varepsilon,y}$. 这里 $\tau_{\varepsilon,y}$ 由从时刻 1（不是从时刻 0）开始的轨道 $X(1), X(2), \cdots$ 所确定的. 易知 τ 是马尔可夫时间，对这个 τ，有

$$\begin{aligned}
M_x f(X(\tau)) &= \sum_{y \in E} p(x, y) M_y f(X(\tau_{\varepsilon,y})) \\
&\geqslant \sum_{y \in E} p(x, y)[v(y) - \varepsilon] \\
&= Pv(x) - \varepsilon \sum_{y \in E} p(x, y) \\
&\geqslant Pv(x) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，对任意 $\varepsilon > 0$，有 $v(x) \geqslant Pv(x) - \varepsilon$. 从而有 $Pv(x) \leqslant v(x)$. 这就证明了 v 是过分函数.

由于立刻停止是一种可能的策略，所以 $v(x) \geqslant f(x)$.

综上所述，我们得到了这样的事实：博弈值 v 是大于等

于盈利函数 f 的最小过分函数(称它为 f 的过分控制)。

这里附带还证明了,任意函数 f 都存在一个过分控制(其推导并非显然)。

这个结果使得我们可以在有限状态的情形用线性规划的方法来求得博奕值。事实上,博奕值 $v(x)$ 是满足下面 $3n$ 个线性不等式

$$\left.\begin{aligned} v(x) &\geqslant \sum_{y\in E} p(x, y)v(y), \\ v(x) &\geqslant f(x), \\ v(x) &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \quad (x\in E)$$

的最小函数,其中 n 为马尔可夫链的状态个数。

§5. 最 优 策 略

我们用 Γ 表示使盈利函数 $f(x)$ 等于它的过分控制 $v(x)$ 的所有状态 x 组成的集,称此集为支集(在图 24 中,这个支集包含点 0, 9, 10, 11 和 12, 在这些点上函数 f 的图象"支撑"着表示函数 v 的直线)。

假定质点最初运动到支集上的一点 x, 如果立刻停止于该点,那么盈利等于 $v(x)$, 而且不可能给出一个更好的策略。另一方面,停在集 Γ 外的一个初始状态 x 上,盈利为 $f(x)$, 它严格小于博奕值 $v(x)$. 因此,如前所知,首先,存在一个最优策略;其次,这个规定停止或继续下去的策略只是作为质点在当时的位置的函数(最优选择问题正是这种情形),所以我们可以推断,最优策略是由质点首次到达 Γ 的时间 τ 给出的.然而,至今我们只能把这作为一种合理的假设而采用。

但是,这个假设并不总是成立的,例如,考虑一个无穷多个状态 $1, 2, \cdots, n, \cdots$, 的马尔可夫链,其质点从点 n 到点

1 的概率为 $1/n^2$，而从点 n 到点 $n+1$ 的概率为 $(n^2-1)/n$，(图 25)．假定 $n>1$ 时，$f(n)=1-1/n$，且令 $f(1)=1$．显然，这时总可以期望有一个任意接近 1 但永远不会超过 1 的盈利，因此，$v(n)=1$．在这个例子中，支集 Γ 由单点 1 组成．由于 $f(1)=1$，所以对首次到达 Γ 的时间 τ 来说，平均盈利 $M_nf(X(\tau))$ 等于从 n 出发在某个时刻到达 1 的概率

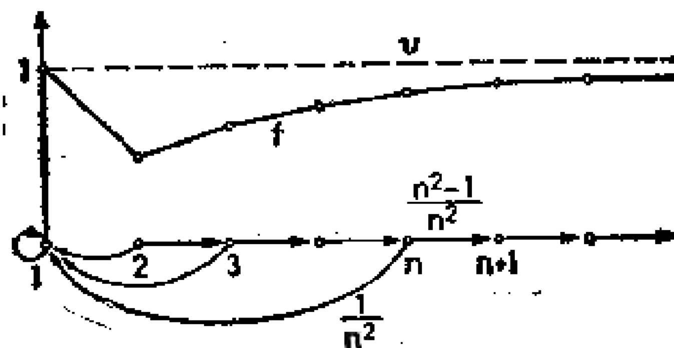


图 25

$\pi(n)$，其逆事件，即质点在右边偏离到无限远的概率等于

$$\prod_{k=n}^{\infty}\frac{k^2-1}{k^2}. \tag{11}$$

由于

$$\prod_{k=n}^{m}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=n}^{m}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$$
$$=\frac{(n-1)(m+1)}{nm},$$

所以无穷乘积(11)收敛且等于 $(n-1)/n$．因此，$\pi(n)=1/n$，而 $v(n)=1$．

在这个例子中，我们的假设不成立与状态空间是无限的这一事实有关．我们来说明，在有限状态空间的情形中，首次到达支集的时间 τ_0 是一个最优策略．

让我们来研究相应于策略 τ_0 的平均盈利

$$h(x)=M_x f(X(\tau_0)),\qquad(12)$$

需证明 $h=v$.根据博奕值的实际定义,有 $h\leqslant v$,由于 $X(\tau_0)\in\Gamma$,且 f 与 v 在 Γ 上相等,所以(12)式中的函数 f 可以用过分函数 v 代替.于是由这个公式可知, h 也是过分函数(见§3). 因为 v 是控制 f 的最小过分函数,所以为了得到相反的不等式 $h\geqslant v$,只需验证 $h\geqslant f$.

在支集 Γ 的点上, $h(x)=f(x)$,这是因为策略 τ_0 规定在这些点上立刻停止. 假设在 Γ 外某处不等式 $h(x)<f(x)$ 成立,用 a 表示使得差 $f(x)-h(x)$ 达到极大的点. 这时函数 $h_1(x)=h(x)+[f(a)-h(a)]$ 控制 f, 在点 a 处与 f 相等,而且由于它是过分函数 $h(x)$ 与正常数 $f(a)-h(a)$ 的和,所以也是过分函数. 因此,h_1 控制 v 且 $f(a)=h_1(a)\geqslant v(a)$. 这表示在支集 Γ 外的点 a 又属于 Γ,这个矛盾说明不等式 $h(x)<f(x)$ 不可能成立,这就证明了策略 τ_0 的最优性.

下面来讨论可数状态空间的马尔可夫链. 这里,如上所述,可以证明,在首次到达这个参照集 Γ 的时刻停止是一个很不利的策略. 但是,也可以证明,如果不选集 $\Gamma=\{x: f(x)=v(x)\}$ 而选一个"ε 支集" $\Gamma_\varepsilon=\{x: v(x)-f(x)\leqslant\varepsilon\}$,并且研究首次到达集 Γ_ε 的时间 τ_ε,那么对任意 $\varepsilon>0$,有

$$M_x f(X(\tau_\varepsilon))\geqslant v(x)-\varepsilon.\qquad(13)$$

因此,ε 支集可使我们能够找到一个策略,其盈利任意接近博奕值.

不等式(13)的证明方法与有限状态空间, $\varepsilon=0$ 的情形类似,只需稍作修改. 由于在 Γ_ε 上 $f(x)\geqslant v(x)-\varepsilon$, 故有

$$\begin{aligned}M_x f(X(\tau_\varepsilon))&\geqslant M_x v(X(\tau_\varepsilon))-\varepsilon P_x\{\tau_\varepsilon<\infty\}\\&\geqslant M_x v(X(\tau_\varepsilon))-\varepsilon.\end{aligned}$$

函数 $h(x)=M_x v(X(\tau_\varepsilon))$ 与 v 一样都是过分函数, 下证 $h(x)\geqslant f(x)$. 如果 $\sup[f(x)-h(x)]=c>0$,那么 $h(x)+$

c 是过分函数且控制 $f(x)$. 因此，对所有 x，有 $h(x)+c \geqslant v(x)$. 因为 $c>0$，所以存在一个状态 a 使得 $f(a)-h(a)>0$，而且同时又有 $f(a)-h(a)>c-\varepsilon$. 于是 $f(a)=f(a)-h(a)+h(a) \geqslant c-\varepsilon+v(a)-c=v(a)-\varepsilon$，因而 $a \in \Gamma_\varepsilon$. 但是，在 Γ_ε 内的点，函数 h 与 v 相等，故 $h(a)=v(a) \geqslant f(a)$. 这与不等式 $f(a)-h(a)>0$ 矛盾. 因此，c 不能大于零，因而 $h(x)$ 控制 $f(x)$，但这时过分函数 $h(x)$ 也控制 $v(x)$，故

$$M_x f(X(\tau_\varepsilon)) \geqslant h(x)-\varepsilon \geqslant v(x)-\varepsilon.$$

§6. 应用于带有吸收壁的随机徘徊及最优选择问题

质点在线段 $[0, a]$ 上作随机徘徊，两个端点为吸收壁. 质点处于 $1, 2, \cdots, a-1$ 的任意点上，每一步向左或向右移动一个单位的概率为 $\frac{1}{2}$，如到达点 0 或 a，就永远呆在那里（见图 24，在那里 $a=12$）.

对于这类马尔可夫链的最优停止问题，在 §2 最后未加证明地给出了它的解. 由 §3—§5 一般阐述可知，为了证实这个解只需验证这些过分函数是非负上凸函数.

根据定义，如果 $f \geqslant 0$ 且 $Pf \leqslant f$，那么 f 是过分函数，在目前情况下，条件 $Pf \leqslant f$ 化为不等式

$$\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2} \leqslant f(x)$$

$$(x=1, 2, \cdots, a-1) \qquad (14)$$

和明显的关系式

$$f(0) \leqslant f(0), \quad f(a) \leqslant f(a).$$

不等式(14)表明，如果用线段连接函数 $f(x)$ 图象上相邻的点，那么在任意内点 x 处所得到的折线顶点将不低于连接点

$x-1$ 与 $x+1$ 处顶点的弦（图 26）。因此，条件 $Pf \leqslant f$ 等同于函数 $f(x)$ 的上凸性，这正是需要证明的。

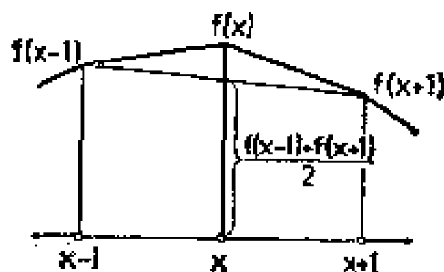


图 26

让我们来考察在最优选择问题中引进的概念是怎样起作用的。如我们所知，这问题归结为一个状态为 $1, 2, \cdots, n$，转移概率为

$$p(k, l) = \begin{cases} \dfrac{k}{l(l-1)} & \text{当 } l > k \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } l \leqslant k \text{ 时,} \end{cases}$$

而盈利函数为 $f(k) = k/n$ 的马尔可夫链的最优停止问题（见§2）。

我们来求盈利函数 $f(k)$ 的过分控制 $v(k)$ 与参照集 $\Gamma = \{k: f(k) = v(k)\}$。由定义，$v$ 是满足不等式 $v \leqslant f$，$Pv \leqslant v$，且 $v \geqslant 0$ 的最小函数。在现在的情况下，这些不等式化为

$$v(k) \geqslant \frac{k}{n},$$

$$v(k) \geqslant \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k}{l(l-1)} v(l),$$

$$k = 1, 2, \cdots, n.$$

因此，如果当 $l > k$ 时，$v(l)$ 已知，那么

$$v(k) = \max\left\{\frac{k}{n}, k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{l(l-1)}\right\}.$$

我们已经得到了一个确定 $v(k)$ 的递推公式，根据这个公式，

只要不等式

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\leqslant 1, \tag{15}$$

成立，我们就逐次得到

$$v(n)=\max\left\{\frac{n}{n}\right\}=1=f(n),$$

$$v(n-1)=\max\left\{\frac{n-1}{n},\ (n-1)\frac{1}{n(n-1)}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{n-1}{n},\frac{1}{n}\right\}=\frac{n-1}{n}$$

$$=f(n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$v(k)=\max\left\{\frac{k}{n},k\left[\frac{\frac{k+1}{n}}{(k+1)k}+\frac{\frac{k+2}{n}}{(k+2)(k+1)}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{n(n-1)}\right]\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{k}{n},\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\right\}=\frac{k}{n}=f(k).$$

当 k 减小时，一旦和 $\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ 变成大于1，$v(k)$ 就变成严格大于 $k/n=f(k)$. 进一步减小 k 时和 $\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ 仍然大于 1，因此在这些点上，

$$v(k)\geqslant k\sum_{l=k+1}^{n}\frac{v(l)}{l(l-1)}\geqslant k\sum_{l=k+1}^{n}\frac{f(l)}{l(l-1)}$$

$$=\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)>\frac{k}{n}=f(k).$$

因而，支集 Γ 具有形式 $\{k_n, k_n+1, \cdots, n\}$，其中 k_n 是满足不等式 (15) 的最小整数，我们已经熟悉了这个结果.

对 $k \geqslant k_n$，博奕值等于 $v(k)=f(k)=k/n$，而对 $k<k_n$，根据关系式

$$v(k)=k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{l(l-1)},$$

可逐次计算相应的博奕值[1].

§ 7. Wiener 过程的最优停止

不仅对马尔可夫链可以分析它的最优停止问题，而且对不可数状态空间和连续时间的过程也可以分析此问题. 我们打算研究这类中一个最基本的过程，即在区间 $[0, a]$ 上其端点为吸收壁的 Wiener 过程 $X(t)$. 由定义，给定任意初始状态 x，$0 \leqslant x \leqslant a$，质点在到达端点之前，它的运动完全与一个在无限直线上的普通 Wiener 过程一样，而当质点到达点 0 或 a 时，它将永远呆在那点不动[2].

假定在区间 $[0, a]$ 上给定了盈利函数 $f(x)$，要求出博奕值

$$v(x)=\sup_{\tau} M_x f(X(\tau)) \quad (0 \leqslant x \leqslant a),$$

其中 τ 表示所有可能的马尔可夫时间，并要构造特殊的马尔可夫时间 τ_0，满足

---

1) 不难说明，对 $k<k_n$，$v(k)$ 事实上与 k 独立且可由(2)式求出.

2) 我们不考虑整个直线上的 Wiener 过程，因为在那种情形中，质点到达任意点的概率为1，从而最优停止问题与常返马尔可夫链一样具有同样平凡解.

$$M_x f(X(\tau_0)) = v(x)$$
(即找出最优策略)。

这里，我们感兴趣的过程是在线段上，其端点为吸收壁的对称随机徘徊的连续类似，即在§2与§6讨论过的问题。我们看到，在连续情形下问题的解仍不变，只是整数点上的上凸函数要换成一个定义在整个区间 $[0, a]$ 上的上凸函数。

回顾一下，给定在区间 $[0, a]$ 上的函数 $f(x)$ 称为**上凸函数**是指，如果连接函数 f 图象上的任意两点间的弦都不在 f 图象的上边(图 27)。我们指出，**一个在区间上是上凸的函数，它在这个区间内连续**且在这区间的端点上有不小于这函数在端点上的值的有限极限(见附录§2)。例如，在图 27 中

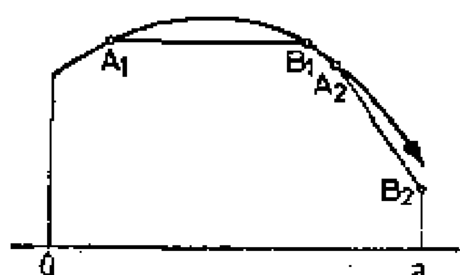


图 27

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0), \quad \lim_{x\to a} f(x) > f(a).$$

在我们的过程中，上凸函数起着特殊的作用，这可以用下列事实来说明：**对任意马尔可夫时间 τ，非负上凸函数(只有这些函数)满足不等式**

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant f(x). \tag{16}$$

这个命题的证明较复杂，我们将专用一节(§8)来讨论它。

在给出了满足条件(16)的函数类之后，可以用§4与§5中讨论任意马尔可夫链的几乎同样的方法来求出博奕值与最优策略。

先来计算从 x 出发，在到达 x_2 之前到达点 x_1 的概率 $q(x) = q(x; x_1, x_2)$ 与到达 x_1 之前到达点 x_2 的概率 $p(x) = p(x; x_1, x_2)$ $(0 \leqslant x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \leqslant a)$。由第二章的结果可知，函数 $q(x)$ 是区间 $[x_1, x_2]$ 上的 Dirichlet 问题的解，且在点

x_1 取值 1 而在点 x_2 取值零。 由于在一维的情形 Laplace 方程 $\Delta q = 0$ 呈现 $q'' = 0$ 的形式，所以它的所有解都是线性函数，即它们具有 $q(x) = cx + d$ 的形式．由边界条件 $q(x_1) = 1$，$q(x_2) = 0$ 来确定常数 c 与 d 的值，就得到

$$q(x; x_1, x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},$$

$$p(x; x_1, x_2) = 1 - q(x; x_1, x_2) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (17)$$

现在来求博奕值 $v(x)$，暂时把盈利函数 $f(x)$ 看作是有界的但不要求连续[1]．注意到，如果 $g(x)$ 是控制 $f(x)$ 的非负上凸函数，那么对任意 τ，有

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant M_x g(X(\tau)) \leqslant g(x),$$

因此，$g(x)$ 控制 $v(x)$．

函数 $v(x)$ 本身是非负的(存在一个策略 $\tau = \infty$，其盈利为零)且也是上凸的．为此，设 $[x_1, x_2]$ 是包含在 $[0, a]$ 内的某个子区间，τ_1 与 τ_2 分别为在初始状态 x_1 与 x_2 下平均盈利大于 $v(x_1) - \varepsilon$ 与 $v(x_2) - \varepsilon$ 的两个策略(上界的概念确保了对任意 $\varepsilon > 0$ 这样的策略的存在)．我们来考察策略 τ：先等待它首次到达点 x_1 或 x_2 之一，然后用相应的策略 τ_1 或 τ_2．这时，由(17)式，有

$$M_x f(X(\tau)) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} M_{x_1} f(X(\tau_1)) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} M_{x_2} f(X(\tau_2)) \geqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot [v(x_1) - \varepsilon] + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} [v(x_2) - \varepsilon]$$

---

1) 函数 f 的有界性（以及我们前面已约定不予讨论的可测性）保证了均值 $M_x f(X(\tau))$ 的存在．

$$=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}v(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}v(x_2)-\varepsilon,$$

于是

$$v(x)\geqslant\frac{(x_2-x)v(x_1)+(x-x_1)v(x_2)}{x_2-x_1}-\varepsilon$$

$$\cdot(x_1\leqslant x\leqslant x_2).$$

由于 ε 是任意小的正数，所以上述不等式对 $\varepsilon=0$ 也成立. 因为函数

$$\frac{(x_2-x)v(x_1)+(x-x_1)v(x_2)}{x_2-x_1}$$

在 $[x_1, x_2]$ 上是线性函数且在点 x_1 和 x_2 处与 v 相等，这说明在区间 $[x_1, x_2]$ 上 v 的图象不可能经过任何低于跨跃该函数值两点间的弦，所以，$v(x)$ 是上凸函数.

因此，博奕值是大于或等于盈利函数 f 的最小非负上凸函数，或者更简要地说，博奕值 v 是函数 f 的非负上凸控制（见图 28，在那里给出了一个不连续的函数 f）.

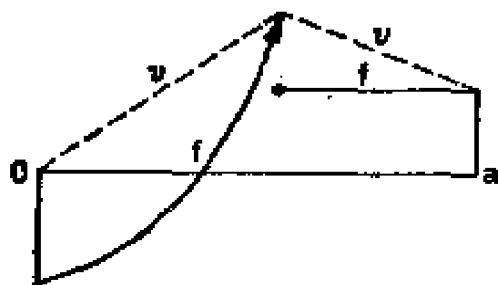


图 28

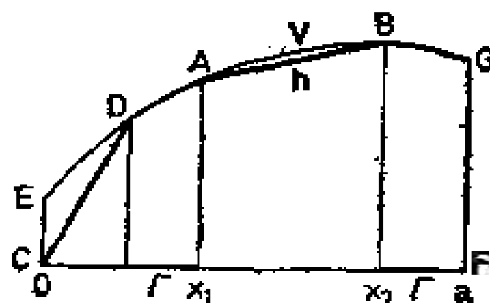


图 29

下面说明，如果函数 f 是连续的，那么和离散情形一样，最优策略是在首次到达支集 Γ（在 Γ 上 $f(x)=v(x)$）的时刻 τ_0 停止该过程. 注意，对不连续的盈利函数 f，这个命题不再成立. 例如，在图 28 中所表明的例子里，集 Γ 仅含单点 a. 这表示，如果我们等待到达 Γ，那将永远得不到大于 $f(a)$ 的盈

利，然而在某些点上 $v(x)$ 比 $f(a)$ 大得多.

先来验证这样一个事实：由盈利函数 f 的连续性可推出博奕值 v 的连续性. 由于函数 v 是上凸的，所以它在区间 $[0, a]$ 的所有内点上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0} v(x) \geqslant v(0)$，$\lim\limits_{x\to a} v(x) \geqslant v(a)$. 为了确定起见，我们来考察点 0 并证明

$$\lim_{x\to 0} v(x) \leqslant v(0). \tag{18}$$

令 $c(u) = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant u} f(x)$，$0 \leqslant u \leqslant a$. 显然，函数 $c(u)$ 与函数 $f(x)$ 一样是连续的，并且当 $X(\tau) < u$ 时，盈利不会超过 $c(u)$ 的值，而当 $X(\tau) \geqslant u$ 时，它不会超过 $c(a)$. 此外，当 $x = X(0) < u$ 时，只有当质点从 x 出发在到达 0 点之前到达 u 这一事件发生时才能有不等式 $X(\tau) \geqslant u$. 根据(17)式，上述事件的概率等于 x/u. 因此，对 $0 < x < u$ 以及任意 τ，有

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant c(u) P_x\{X(z) < u\} + c(a) \cdot \frac{x}{u}.$$

如果 $c(u) \geqslant 0$，那么上不等式右边第一项不超过 $c(u)$，而如果 $c(u) < 0$，那么它不超过 0. 因此，不管在那一种情形，都有

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant \max\{c(u), 0\} + c(a) \frac{x}{u},$$

所以，

$$v(x) \leqslant \max\{c(u), 0\} + c(a) \frac{x}{u},$$

令 $x \to 0$，就得到

$$\lim_{x\to 0} v(x) \leqslant \max\{c(u), 0\} \quad (u > 0),$$

再令 u 趋于 0，我们求出

$$\lim_{x\to 0} v(x) \leqslant \max\{c(0), 0\} = \max\{f(0), 0\},$$

由于 $0 \leqslant v(0)$，$f(0) \leqslant v(0)$，于是不等式(18)证毕.

因为函数 f 与 v 都是连续的，所以满足 $f(x) = v(x)$ 的

这些点 x 组成的支集是闭集(自然，Γ 也可能是一个空集). 令 τ 是首先到达 Γ 的时间，且令

$$h(x)=M_x f(X(\tau))$$

是策略 τ 的平均盈利. 因为在 Γ 上 $f=v$，所以有

$$h(x)=M_x v(X(\tau)). \tag{19}$$

现在我们看到，由(19)式所定义的函数 h，和 v 一样也是上凸的，连续的和非负的. 事实上，如果 $x=X(0)\in\Gamma$，那么 $\tau=0$，且有 $h(x)=v(x)$. 由不属于闭集 Γ 的点构成一组区间，这些区间的端点或者属于 Γ 或者与点 0，a 之一重合(图 29). 如果这样一个区间的端点 x_1 和 x_2 属于 Γ，那么根据(17)式，函数 h 在区间 $[x_1, x_2]$ 上等于

$$h(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}v(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}v(x_2). \tag{20}$$

由这个公式易知，在区间 $[x_1, x_2]$ 上 h 的图象是函数 v 在这区间上图象的点所对的弦 AB. 另一方面，如果区间 (x_1, x_2) 的一个端点与线段 $[0, a]$ 的一个端点重合且不属于 Γ，那么在(20)式中对应于点 x_1 或 x_2 的 v 值用零代替，并且 h 的图象如同图 29 中 CD 那样是一线段. 倘若把竖直部分 CE 与 FG 都看作为 v 的图象，那么也可以把这线段称为 v 的图象的弦. 于是，从 v 的图象在某些区间上用弦“切去凸的部分”就得到了 h 的图象. 几何上显而易见，这种操作又得到一个连续的非负上凸函数的图象(见附录).

由于 v 是控制 f 的最小非负上凸函数，为了证明不等式 $h\geqslant v$(也就是证明策略 τ 的最优性)，只需验证 $h\geqslant f$. 假定差 $f-h$ 在某一处取正值，于是连续函数 $f-h$ 必定在某一点 x_0 达到极大值 $c>0$，而非负上凸函数 $h(x)+c$ 控制 f，这表示它也控制 v. 因而，$h(x_0)+c\geqslant v(x_0)$ 与等式 $c=$

$f(x_0)-h(x_0)$ 合在一起得到关系式 $f(x_0)\geqslant v(x_0)$. 因此，$x_0\in\Gamma$，由此，有 $h(x_0)=v(x_0)=f(x_0)$ 与 $c=f(x_0)-h(x_0)=0$. 这与 $c>0$ 矛盾，于是证明了策略 τ 的最优性.

在结束这一节时，我们对多维情形作一些解释. 考虑一个在边界上具有吸收壁的闭区域 G 内的 l 维 Wiener 过程的最优停止问题. 和一维情形一样可以求出其博奕值，只是非负上凸函数必须用满足下列两个条件的非负函数 f 来代替:

1) 对任意以 x 为中心的 l 维球 $S\subset G$，f 在 S 上的均值不超过 $f(x)$.

2) 对任意 $x\in G$ 和任意 $\varepsilon>0$，存在一 $\delta>0$，使得只要

$$|y-x|<\delta,\quad y\in G,$$

有

$$f(y)\geqslant f(x)-\varepsilon.$$

(应指出，条件 1 是不等式 $M_x f(X(\tau))\leqslant f(x)$ 的特殊情形，这里 τ 是首次离开 S 的时间). 在现代位势理论中，条件 1 与 2 给出了区域 G 上的上调和函数的定义[1]. 因此，可以说博奕值是盈利函数的非负上调和控制. 最优策略远非总存在. 但是，在任何情况下，都可以用 ε 支集给出 ε 最优策略，如同在 §6 最后对可数马尔可夫链所作过的那样.

此外，注意到由于 $l\geqslant 3$ 时，Wiener 轨道不再概率为 1 地进入任意区域，所以对 $l\geqslant 3$ 时，当 G 是全空间的特殊情况下，最优停止问题是重要的.

§8. 上凸函数基本性质的证明

我们还需证明的是，给定区间 $[0, a]$ 上端点为吸收壁的

1) 如果函数 f 连续且有连续二阶偏导数，那么条件 2 自然成立，而条件 1 变成了不等式 $\Delta f\leqslant 0$，其中 Δ 是 Laplace 算子(见第二章 §4 方程 $\Delta f=0$ 的推导).

Wiener 过程,对任意马尔可夫时间 τ, 满足条件

$$f(x) \geqslant M_x f(X(\tau)) \tag{21}$$

的函数 $f(x)$, $x \in [0, a]$, 组成的函数类与非负上凸函数类重合.

一个方面的证明是简单的. 事实上, 在(21)式中令 $\tau = \infty$, 得到 $f \geqslant 0$. 又设 $[x_1, x_2]$ 是包含在 $[0, a]$ 中的子区间, 而 τ 是 $X(t)$ 首次离开 $[x_1, x_2]$ 的时间, 根据(17)式当 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 时,对这个 τ, 有

$$M_x f(X(\tau)) = f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

因而,当 $x \in [x_1, x_2]$ 时,函数 $M_x f(X(\tau))$ 的图象是连续函数 $f(x)$ 的图象上其横坐标为 x_1 与 x_2 的两点间的直线段. 因此,由不等式(21)得知, f 图象上的任何弦都不在这图象的上边,即函数 f 是上凸的.

要证明每一个上凸的非负函数满足条件(21)是相当复杂的. 尽管这论证与离散情形中对过分函数导出条件(21)基本上相同. 下面我们把证明分成六个部分.

1° 利用公式

$$P_t f(x) = M_x f(X(t)) = \int_0^a f(y)\mu_t(dy) \tag{22}$$

对有界函数 $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, 定义一个算子 $P_t (t > 0)$, 其中 $\mu_t(\Gamma) = P_x[X(t) \in \Gamma]$. 且令

$$P_\infty f(x) = \lim_{t \to \infty} P_t f(x).$$

由马尔可夫性得到, 对任意固定 $t > 0$, 过程 $Y(s) = X(s+t)$ 是一个初始分布为 $\mu_t(\Gamma)$ 且端点为吸收壁的 Wiener 过程. 因此,两次应用(22)式,就得到

$$M_x f(Y(s)) = \int_0^a M_y f(X(s))\mu_t(dy)$$

$$= \int_0^a P_s f(y)\mu_t(dy) = P_t P_s f(x).$$

另一方面，

$$M_x f(Y(s)) = M_x f(X(t+s)) = P_{t+s} f(s),$$

所以，算子 P_t 按照规则

$$P_t P_s = P_{t+s} \tag{23}$$

可以相乘．

为了进行比较，回忆离散的马尔可夫链

$$M_x f(X(n)) = P^n f(x)$$

的情形，其中 P 是一步推移算子，因而在离散时间情形下，(23)式就归结为幂乘的一般规则，我们指出，按照(23)式相乘的算子族 $P_t(t>0)$ 称为单参数半群．

由算子 P_t 的定义显见，如果 $f \geqslant 0$，那么 $P_t f \geqslant 0$（算子 P_t 是正的）．对差函数 $f-g$ 应用此性质可知，如果 $f \geqslant g$，那么 $P_t f \geqslant P_t g$（算子 P_t 保持函数间的不等关系）．

下面计算 $P_\infty f(x)$．我们知道，从这个区间的任意点出发的质点，迟早到达这区间的端点的概率为 1，而且它将永远呆在那里不动，因此，当 $t \to \infty$ 时，区间 $(0, a]$ 的 μ_t 测度趋于零，而点 0 与 a 的 μ_t 测度趋于 $P_x\{X(\tau)=0\}$ 与 $P_x\{X(\tau)=a\}$，其中 τ 是质点首次离开区间 $(0, a)$ 的时间．因此，有

$$P_\infty f(x) = f(0)\cdot P_x\{X(\tau)=0\} + f(a) P_x\{X(\tau)=a\},$$

或者根据(17)式，有

$$P_\infty f(x) = f(0)\frac{a-x}{a} + f(a)\frac{x}{a}.$$

由上述表达式易见，$P_\infty f$ 是一线性函数，它在点 0 和 a 的值与 f 在这些点的值重合（图 30）．

2° 对线性函数 f，有

$$P_t f = f, \tag{24}$$

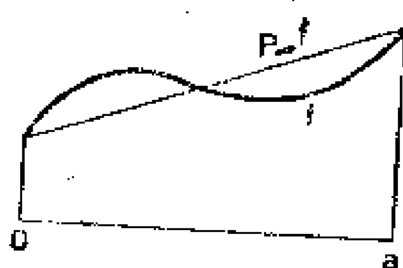


图 30

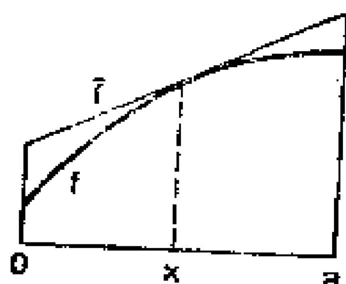


图 31

根据第 1° 部分，如果 f 是线性函数，那么 $f = P_\infty f$. 在等式[1]

$$P_t(P_s f) = P_{t+s} f$$

中，当 $s \to \infty$ 时取极限就得到(24)式. 易证逆命题也成立(我们把这证明留给读者).

3° 如果函数 f 是上凸的，那么

$$P_t f \leqslant f.$$

对 $x = 0$ 和 $x = a$, $X(t) = X(0)$ 的概率为 1, 因此有

$$P_t f(x) = M_x f(X(t)) = M_x f(X(0)) = f(x).$$

假定 x 是区间 $[0, a]$ 的一内点，由于函数 f 是上凸的，可以构造一线性函数 $\bar{f}$, 使得在给定点 x 上 $\bar{f}(x) = f(x)$, 而在其它所有点上 $f \geqslant \bar{f}$ (图 31)(在附录 § 2 中证明了上凸函数的这个性质). 根据第 2° 部分，有

$$P_t \bar{f} = \bar{f}.$$

因为在整个区间上 $\bar{f} \geqslant f$, 而在点 x 上 $\bar{f}$ 与 f 的值相等，所以

$$P_t f(x) \leqslant P_t \bar{f}(x) = \bar{f}(x) = f(x).$$

4° 假定 α 是区间 $(0, 1)$ 中的某个数，称用形式

$$h(x) = \int_0^\infty \alpha^t P_t g(x) dt = M_x \int_0^\infty \alpha^t g(X(x)) dt$$

所表示的函数 h 为 α 位势，其中 $g \geqslant 0$ (在连续情形中 α 位势所起的作用与在离散情形中形如 (8) 式的级数所起的作用一

1) 见第100页注.

样）.

现在证明，如果 $f \geqslant 0$，对于一切 $t, P_t f \leqslant f$，且函数 f 在区间 $[0, a]$ 的内点上连续，那么不论 α 是什么数，$0 < \alpha < 1$，函数 f 都可表示为不减的 α 位势的极限.

利用恒等式 $P_t P_s = P_{t+s}$，得到

$$\int_0^s \alpha^t P_t f dt = \int_0^\infty \alpha^t P_t f dt - \int_s^\infty \alpha^t P_t f dt$$
$$= \int_0^\infty \alpha^t P_t f dt - \int_0^\infty \alpha^{t+s} P_{s+t} f dt$$
$$= \int_0^\infty \alpha^t P_t (f - \alpha^s P_s f) dt,$$

或者

$$\frac{1}{s} \int_0^s \alpha^t P_t f dt = \int_0^\infty \alpha^t P_t g dt, \tag{25}$$

其中

$$g = \frac{f - \alpha^s P_s f}{s}, \tag{26}$$

因为 $|\alpha| < 1$ 且 $|P_t f(x)| = |M_x f(X(t))|$ 以数 $\sup_x |f(x)|$ 为界. 所以这些积分收敛. 由于 $0 \leqslant P_t f \leqslant f$ 且 $0 < \alpha < 1$，于是由(26)式得到 $g \geqslant 0$. 因此，(25)式右边是一个 α 位势. 我们可以确立下述事实：如果能验证

$$\lim_{t \to 0} P_t f = f \tag{27}$$

并且 $\alpha^t P_t f$ 是变量 t 的不增函数，那么当 $s \to 0$ 时，这个 α 位势不减地收敛到 f. 对 $\alpha^t P_t f$ 所要求的单调性可由下列关系式

$$\alpha^{t+u} P_{t+u} f \leqslant \alpha^t P_{t+u} f = \alpha^t P_t (P_u f) \leqslant \alpha^t P_t f \quad (u > 0)$$

得到. 为了证明(27)式，回忆

$$P_t f(x) = M_x f(X(t)),$$

因为过程 $X(t)$ 的轨道是连续的，所以当 $t \to 0$ 时，$X(t) \to x$

的概率为 1. 这说明在 f 的连续点 x (即在 $(0, a)$ 的所有内点)上，$f(X(t)) \to f(x)$ 的概率也为 1. 但是如果随机变量 $f(X(t))$ 概率为 1 地收敛到一个常数 $f(x)$，那么它的均值也收敛到这个常数 $f(x)$ 的均值，即数 $f(x)$ 本身 (由于随机变量 $f(X(t))$ 对任意 t 以同一数 $k = \sup_x |f(x)|$ 为界，所以在均值号内取极限是合理的). 因此，

$$\lim_{t\to 0} \alpha^t P_t f(x) = \lim_{t\to 0} \alpha^t \lim_{t\to 0} M_x f(X(t)) = f(x)$$

$$(0 < x < a).$$

至于在点 $x = 0$ 与 $x = a$ 处 (f 在这两点可能不连续)，对一切 t 都有 $P_t f(x) = f(x)$，由此立刻得到(27)式.

5° 如果 $h(x)$ 是一个 α 位势而 τ 是任意马尔可夫时间，那么

$$M_x \alpha^\tau h(X(\tau)) \leqslant h(x).$$

由于有条件

$$h(x) = \int_0^\infty \alpha^t g(X(t))dt,$$

其中 $g \geqslant 0$，因此，

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant M_x \int_\tau^\infty \alpha^t g(X(t))dt \\ &= M_x \alpha^\tau \int_0^\infty \alpha^s g(X(\tau+s))ds \\ &= M_x \alpha^\tau \int_0^\infty \alpha^s g(Y(s))ds, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $Y(s) = X(\tau + s)$. 根据强马尔可夫性，在 $\tau = t$，$X(\tau) = y$ 的条件下，过程 $Y(s)$ 与从点 y 开始的过程 $X(s)$ 完全一样[1]. 因此

1) 这里，在直观上有道理但不太严格的论证 (它涉及到在零概率条件 $\tau = t$，$X(\tau) = y$ 下所发生的事)完全可以用严格的形式给出.

$$M_x\left(\alpha^\tau\int_0^\infty \alpha^s g(Y(s))ds \,\middle|\, \tau=t, X(\tau)=y\right)$$
$$=\alpha^t M_y\int_0^\infty \alpha^s g(X(s))ds=\alpha^t h(y).$$

用 $F(t, y)$ 表示一对随机变量 τ 与 $X(\tau)$ 的联合分布函数，这时有

$$M_x\alpha^\tau\int_0^\infty \alpha^s g(Y(s))ds=\int_0^\infty\int_0^a \alpha^t h(y)dF(t, y)$$
$$=M_x\alpha^\tau h(X(\tau)).$$

把这个值代入(28)式;就得到所要的结果.

最后，我们来证明非负上凸函数 f 满足条件(21). 由上凸函数在区间 $[0, a]$ 内连续以及第 3° 和 4° 部分可知，对任意 $\alpha\in(0, 1)$，f 是不减 α 位势序列 $h_1, h_2, \cdots, h_n\cdots$ 的极限. 又根据第 5° 部分，对任意马尔可夫时间 τ，有

$$M_x\alpha^\tau h_n(X(\tau))\leqslant h_n(x)\leqslant f(x).$$

因为 h_n 单调收敛到 f，所以当 $n\to\infty$ 对上述不等式取极限，可以将极限符号移到符号 M_x 内，因而对任意正数 $\alpha<1$，有

$$M_x\alpha^\tau f(X(\tau))\leqslant f(x).$$

当 $\alpha\to 1$ 时再取极限，就得到 $M_x f(X(\tau))\leqslant f(x)$.

把已经给出的证明拓广到多维 Wiener 过程会怎样呢? 如 §7 最后所述，一般地是用上调和函数来取代上凸函数的作用. 和以前一样，用公式

$$P_t f(x)=M_x f(X(t))$$

定义算子 P_t. 称满足条件

$$P_t f\leqslant f,$$
$$\lim_{t\to 0} P_t f=f \tag{29}$$

的非负函数为过分函数(参考 §3 中马尔可夫链的过分函数定义)大体上说，在这节开始我们证明了非负上凸函数是过分函

数，然后我们又确立了这样的事实：对任意马尔可夫时间 τ，过分函数满足不等式

$$M_x f(X(\tau)) \leqslant f(x).$$

读者容易验证，这证明的后半段有着完全一般的特性，并且同样地适合于多维情形。另一方面，在多维情况下，证明上调和非负函数是过分函数比起一维情形要复杂（我们不止一次地用到了上凸函数的特殊性质，例如，它们在区间的内点上的连续性）。此外，问题的一维性质使得我们在 §7 能够避免与博奕值的可测性有关的问题。

习　　题

选取两个最优对象中的一个

假定需要在 n 个对象中选取两个最优对象中的一个（两个中选取哪一个无关紧要）。和 §1 所分析的情形一样，这个问题又归结为某个马尔可夫链 $X(0), X(1), X(2)\cdots$ 的最优停止问题。在 §1 中，这个链的元素代表极大对象(点)(即比已经检查过的所有对象都好的对象)的下标。显然，在新的问题中，必须给极大一个弱一些的解释。如果在所有已经检查过的对象 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中，对象 a_k 是最好的或第二好的，那么把 a_k 看作为“极大”。然而，这不是重要的，重要的是，$X(i)$ 的值不仅需要指出相应的“极大”对象的次序数（下标），而且还要指出这个对象是否是最好的（即在前面意义下的极大），还是第二好的。因此较为方便地是，把链 $X(i)$ 的状态空间表示成各有 n 个点的平行两行，上面一行表示比前面的对象都好的对象，下面一行表示前面对象中只有一个比它好的对象(图 32)。

1. 求链 $X(i)$ 的转移概率。

答案．无论点 k 与 l 是在上一行还是在下一行，都有

$$p(k, l)=\frac{k(k-1)}{l(l-1)(l-2)} \quad (l>k)$$

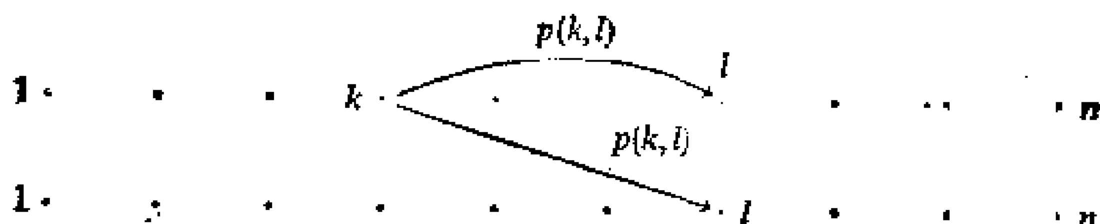


图 32

(当 $l=2$, $k=1$ 时,假定这个分数等于 $k/[l(l-1)]$).

2. 求这个马尔可夫链在给定点停止时的成功概率(盈利函数) f.

答案. 用下标 1 表示上一行的点,用下标 2 表示下一行的点,于是有

$$f_1(k)=\frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)},$$

$$f_2(k)=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

用类似于 §6 所用过的论证可表明,根据关系式

$$v_j(k)=\max\left\{f_j(k),\ \sum_{l=k+1}^{n} p(k,l)[v_1(l)+v_2(l)]\right\} \quad (30)$$

(v_1 对应于上一行的点,v_2 对应于下一行的点),可以相继求出博奕值 v. 用 Γ_j 表示第 j 行使函数 f 与 v 重合的点组成的集 ($j=1,2$).

3. 集 Γ_2 具有 $\{m_2, m_2+1, \cdots, n\}$ 的形式,其中 m_2 是大于或等于 $(2n+1)/3$ 的最小整数.

集 Γ_1 也包含所有数 $m_2, m_2+1, \cdots, n$.

提示. 验证事实

$$\sum_{l=k+1}^{n} p(k, l)[f_1(l) + f_2(l)] = \frac{2k(n-k)}{n(n-1)}$$

并应用(30)式

用 B_k 表示由 Γ_2 加上上一行的点 $k+1, k+2, \cdots, n$ $(k < m_2)$ 组成的集，令 τ_k 表示首次到达 B_k 的时间

4. 如果 $f_1(k) < M_k f(X(\tau_k))$，那么 k 不属于 Γ_1。如果 $k+1, k+2, \cdots, n$ 属于 Γ_1 且 $f_1(k) \geqslant M_k f(X(\tau_k))$，那么 k 属于 Γ_1。

提示．任给一初始状态，在首次到达 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 的时间停止是一个最优策略（见§5）。

5. 对初始状态 k 求 $X(\tau_k)$ 的分布。

提示．用对象 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_l$ 描述事件 $X(\tau_k) = l$。当 $k < l < m_2$ 时，对上一行的点 l 有

$$P_k\{X(\tau_k) = l\} = \frac{k}{l(l-1)},$$

而当 $m_2 \leqslant l \leqslant n$ 时，对两行的点 l 都有

$$P_k\{X(\tau_k) = l\} = \frac{k}{m_2 - 1} p(m_2 - 1, l).$$

6. 集 Γ_1 具有 $\{m_1, m_1+1, \cdots, n\}$ 的形式，其中 m_1 是满足

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1+1} + \cdots + \frac{1}{m_2-2}\right) \leqslant \frac{3m_2 - 2m_1 - 4}{2(n-1)}$$

的最小正整数。

7. 如果对象的个数 n 无限增加，那么

$$\lim \frac{m_1}{n} = \alpha, \quad \lim \frac{m_2}{n} = \frac{2}{3},$$

其中 α 是方程 $\alpha - \ln\alpha = 1 - \ln(3/2)$ 的根且小于 1 ($\alpha \approx 0.347$)。

8. 当 $n \to \infty$ 时，最优策略成功的概率趋于 $\alpha(2-\alpha) \approx$

0.574。

提示．对任意初始状态 $s < m_1$，首次到达集 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 的时间的分布与习题 5 中当 $k = m_1 - 1$ 时 $X(\tau_k)$ 的分布相同．

选择问题的进一步推广

现在假定需要以最大的概率按照对象的质量在前 s 个对象中选取一个(对象总的个数为 $n(s < n)$)．这时马尔可夫链 $X(i)$ 的状态空间由包含 n 个点的 s 行所组成，质点到达第 j 行的点 k 表示在这组对象 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中对象 a_k 按质量被排在第 j 名．用 $f_j(k)$ 表示这个链在第 j 行点 k 停止时的盈利函数(成功的概率)，用 $v_j(k)$ 表示该点的博奕值，而用 Γ_j 表示支集 Γ 位于第 j 行的那部分．

9．链 $X(i)$ 的转移概率 $p(k, l)$ 不依赖于标有 k 与 l 的点在哪一行．

易证

$$v_j(k) = \max\left\{f_j(k),\ \sum_{l=k+1}^{n} P(k,l) \sum_{i=1}^{s} v_i(l)\right\} \qquad (31)$$

(参见 (30) 式)．

10．函数 $f_j(k)$ 关于变量 k 单调递增；关于变量 j 单调递减．

11．(31)式中的双重和，随着 k 增加而单调递减．

提示．如果在前 k 个对象不许停止，那么这个和就等于这个最优策略的平均盈利．

12．集 Γ_j 具有 $\{m_j, m_{j+1}, \cdots, n\}$ 的形式，其中 $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_s \leqslant n$．

13．计算 $\sum_{j=1}^{s} f_j(k)$．

提示．引进下列符号的事件：

$A = \{a_k$ 是前 s 个最好的对象之一$\}$．

$B_j=\{a_k$ 按好坏在对象 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中排第 j 名$\}$，
于是

$$\sum_{j=1}^{s} f_j(k) = \sum_{j=1}^{s} P\{A|B_j\} = k\sum_{j=1}^{s} P\{A|B_j\}P\{B_j\}$$
$$= kP(A) = \frac{ks}{n}.$$

14. 用习题 12 的符号，对 $s \geqslant 2$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_s}{n} = \sqrt[s-1]{\frac{s}{2s-1}}.$$

提示. 计算

$$f_s(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{n(n-1)\cdots(n-s+1)}$$

和

$$p(k, l) = \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{l(l-1)\cdots(l-s)}$$

之后， 再用(31)式与习题 12 (考虑 $s=1$ 和 $s=2$ 的情形)。为了计算(31)式中的和，用恒等式

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{(l-1)(l-2)\cdots(l-s)}$$
$$= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)},$$

它对 $s \geqslant 2$ 恒成立.

独立随机变量序列停止的最优规则

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是独立随机变量，它取值于某个数集 X，令 $f(k, x)$ ($k=1, 2, \cdots, n$, $x \in X$) 是一个非负函数，用 ξ_1 表示第一个，ξ_2, ξ_3 表示第二、三个等等. 观察可以在任何时间 k 停止，这时盈利为 $f(k, \xi_k)$. 需要求出使得平均盈利为极大的最优停止规则.

和最优选择问题一样，可以用归纳法从大到小地给出博

实值 $v(k, x)$，并验证最优策略就是首次到达支集 Γ 的点 (k, ξ_k) 的时刻停止，其中 Γ 由 $f(k, x) = v(k, x)$ 的数对 (k, x) 所组成。

对于不独立的随机变量，问题的提法完全不变，但解却变的非常复杂。这是因为，在一般情形下，最优停止规则需要包含所有的观察值，而不只是最后一个值。有趣地是，最早提出最优停止问题恰好是针对不独立的情形。特别地，在 1874 年 A. Cayley 提出了如下问题(见 [20]，其解见[21])：

"如下安排抽签：有 k 张分别地标有 a，b，c，··· 英磅的彩票，某个人抽一次，看他的彩票，如果他愿意可(从剩下的 $k-1$ 张彩票中)再抽，再看他的彩票，如果他愿意，还可(从剩下的 $k-2$ 张彩票中)再抽，一直这样下去，抽取最多不超过 n 次，他得到最后抽取的彩票的值。假设他根据概率论用最有利的方法来抽取，那么他取值的均值是多少呢？"

为了解决这个问题，Cayley 给出了从大到小的归纳法的一种算法，并对 $k=4$，$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$，$n=1, 2, 3, 4$ 的情形给出了它们的解。

根据质量好坏，在前 S 个对象中选择一个的问题(见习题 9—12) 转化为下面从独立随机变量序列中选择的问题[1]。

15. 如果对象 a_k 按照质量好坏在 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中排在第 j 名，令

$$\xi_k = \begin{cases} j, & 1 \leqslant j \leqslant s, \\ s+1, & s+1 \leqslant j. \end{cases}$$

随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 独立，且在 $\xi_k = j$ 的条件下，选择对象 a_k，其成功的概率 $f(k, j)$ 为

$$f(k, j) = \begin{cases} f_j(k), & 1 \leqslant j \leqslant s, \\ 0, & s+1 \leqslant j, \end{cases}$$

1) 见[22]，在这篇文章中还得到了和前面一系列问题不同提法的某些结果。

其中 $f_i(k)$ 是习题 10 中的函数。

16. 如果 $f(k, x)$ 关于变量 k 是一个不减函数，且 $f > 0$，那么存在一整数值函数 $m(x)$，$x \in X$，使得集 Γ 用不等式 $m(x) \leqslant k \leqslant n$ 来确定。另外，如果 $f(k, x)$ 是 x 的不增(不减)的函数，那么 $m(x)$ 是 x 的不减(不增)的函数。

17.（见[23]）。设 ξ_k 在区间 $[0, 1]$ 上均匀分布且令 $f(k, x) = x$，那么

$$m(x) = n - k \quad 对 \quad x_k \leqslant x < x_{k+1},$$

其中数 x_k 由关系式

$$x_{k+1} = \frac{1 + x_k^2}{2}, \quad x_0 = 0,$$

给出。

提示。 对 k 用归纳法可以证明

$$v(k, x) = \begin{cases} x_k, & 0 \leqslant x \leqslant x_k, \\ x & x_k \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

18. 在前一问题中，当 $k \to \infty$ 时，有

$$1 - x_k \sim \frac{2}{k}.$$

提示。 令

$$x_k = 1 - \frac{2}{a_k},$$

于是有

$$a_{k+1} = a_k + 1 + \frac{1}{a_k - 1}, \quad a_0 = 2,$$

因此，相继地得到 $a_k \to \infty$，$a_{k+1} - a_k \to 1$，$a_k/k \to 1$。一个较好的估计是

$$k + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) + 1 < a_k$$

$$\leqslant k + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) + 2.$$

在 Moser 的论文[23]中可以找到进一步的改善.

一般马尔可夫链的最优停止

19. 如果一个链具有可列多个状态,从任何一个状态 x 出发都概率为 1 地到达支集 Γ, 那么在首次到达 Γ 的时刻停止是一个最优策略.

提示. 考虑首次到达 ε 支集 Γ_ε 的时间 τ_ε 并令 ε 趋于零.

20. 状态 a 属于支集 Γ 的充分必要条件是,存在一个处处大于或等于盈利函数 f 的过分函数 h 且它在点 a 与 f 重合.

21. (逐次逼近法[1])设 f^+ 表示一函数. 当 $f \geqslant 0$ 时它等于盈利函数 f, 当 $f < 0$ 时它等于零,令算子 Q 由等式

$$Qf(x) = \max\{f(x), Pf(x)\}$$

给出,那么当 $n \to \infty$ 时, $Q^n f^+$ 单调收敛到博奕值 v.

提示. 函数 $Q^\infty f = \lim\limits_{n\to\infty} Q^n f$ 是 f 的过分控制.

博奕的费用

假设从 x 到 y 每一次转移要收费 $\Phi(x, y)$, 如果从任何初始状态 x 出发直到这个链停止时刻 ζ 的平均费用

$$F(x) = M_x \sum_{t=1}^{\zeta-1} \Phi(X(t-1), X(t))$$

是有限的, 那么这个最优停止问题可转化为不收费用的博奕情形.

22. 对任意马尔可夫时间 τ, 有

$$F(x) = M_x \sum_{t=1}^{\tau} \Phi(X(t-1), X(t)) + M_x F(X(\tau)).$$

提示. 与第一章 § 5 中(24)式的证明进行比较.

23. 量

$$M_x\left[f(X(\tau)) - \sum_{t=1}^{\tau} \Phi(X(t-1), X(t))\right]$$

1) 由 A. D. Venttsel 提出.

在马尔可夫时间 τ 达到它的极大值，当且仅当在具有盈利函数为 $f(x)+F(x)$ 的马尔可夫链 $X(t)$ 的停止问题中，τ 是最优策略.

无界盈利函数

在第三章里,我们假定了盈利函数 f 是有界的,现在我们舍去这一假定，但要求 f 是非负的(因此均值 $M_x f(X(\tau))$ 总存在，或有限或无限). 用和在 § 2, § 3 中同样的方式定义博奕值与过分函数类,只是现在允许这些函数取 $+\infty$ 值.

24. 任一过分函数 f 是有界过分函数不减序列的极限.

提示. 考虑 $f_n(x)=\min\{n, f(x)\}$.

25. 把不等式 $M_x f(X(\tau))\leqslant f(x)$ 拓广到允许取 $+\infty$ 值的过分函数(其中 τ 是任意马尔可夫时间).

26. 博奕值 v 是盈利函数 f 的过分控制.

提示. 函数 v 是不减序列 $\{v_n\}$ 的极限，其中 v_n 是习题 24 中对应于盈利函数 f_n 的博奕值.

27. 对于有限盈利函数 f, 其博奕值 v 可能是无限的.

提示. 考虑在半直线 $x\geqslant 0$ 的整数点上以零点为吸收壁的随机徘徊,假定盈利函数 $f(0)=1$, $f(k)=k(k\geqslant 1)$.

28. 如果博奕值为有限,那么当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时,首次到达 ε 支集 Γ_ε 时停止的平均盈利趋于博奕值.

Martin 边界

Martin 方法(后被 Doob 所发展[24]) 对揭示可列马尔可夫链的所有过分函数类的结构提供了一种方法.

设 $X(t)$ 是在可列状态空间 E 上的马尔可夫链,它从任意初始状态 x 出发再返回到 x 的概率小于 1. 用 $g(x, y)$ 表示从初始状态 x 出发到达点 y 的次数的均值 (Green 函数，参见第一章 § 5).

29. 证明

$$g(x, y) = \pi_y(x) g(y, y),$$

其中 $\pi_y(x)$ 是从 x 出发，在某个时刻到达 y 的概率。

由习题 29 和第一章的习题 2 可知，对任意 x, y, 有

$$g(x, y) < \infty.$$

我们把在第一章中有关对称随机徘徊的位势与调和函数的定义推广到马氏链 $X(t)$ 的情形，非负函数 φ 的位势指的是函数

$$G\varphi = \varphi + P\varphi + P^2\varphi + \cdots + P^n\varphi + \cdots,$$

而调和函数是满足 $Ph = h$ 的函数 h.

和第一章 §5 一样，我们确立这样一个事实：

$$G\varphi(x) = \sum_{y \in E} g(x, y)\varphi(y),$$

位势 $G\varphi(x)$ 是过分函数，且任意过分函数 f 可以表示成 $G\varphi + h$ 的形式，其中 $\varphi = f - Pf$, $h = \lim\limits_{n\to\infty} P^n f$ 是一非负调和函数。

30. 过分函数 f 是一个位势当且仅当$n\to\infty$时，有$P^n f\to 0$.

31. 一个过分函数与一个位势的最小值是一个位势.

32. 任何过分函数是不减位势序列的极限.

提示. 把空间 E 的点编号并用 B_n 表示前 n 个点组成的集，于是函数

$$f_n = \min\{nG\chi_{B_n}, f\}$$

构成所要求的位势序列 (χ_B 是集 B 的示性函数).

另外，我们假定对某个状态 $0 \in E$, 对一切 $y \in E$, 概率 $\pi_y(0)$ 是正的[1]. 于是有 $g(0, y) > 0$. 根据习题 32，对于一个过分函数 f, 存在一列函数 $\varphi_n \geqslant 0$, 使得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y \in E} g(x, y)\varphi_n(y). \tag{32}$$

---

1) 一般说同样地描述适用于，当从状态 0 出发可到达的状态集 S 为有界时（显然，不能从 S 到 $E\backslash S$）所得得的马尔可夫链.

引进 Martin 核

$$k(x, y) = \frac{g(x, y)}{g(0, y)} = \frac{\pi_y(x)}{\pi_y(0)}$$

(见习题 29)，把(32)式重新写成

$$f(x) = \lim \sum_{y \in E} k(x, y)\mu_n(y), \tag{33}$$

其中 μ_n 是 E 上用等式

$$\mu_n(y) = g(0, y)\varphi_n(y) \tag{34}$$

所给出的测度序列。

对固定的 y 值，需要强调把 $k(x, y)$ 看作是 $x \in E$ 上的函数时，记 $k(x, y)$ 为 $k_y(x)$

33. 不同的状态 $y \in E$ 对应着不同的函数 $k_y(x)$。

提示. 函数 $k_y(x) - Pk_y(x)$ 在单点 $x = y$ 的值不为零。

34. 所有函数 $k_y(x)$ 的值在给定点 $x \in E$ 以数 $1/\pi_x(0)$ 为界。

提示. 利用习题 29 和不等式 $\pi_y(0) \geqslant \pi_x(0)\pi_y(x)$.

习题 33 表明函数 $k_y(x)$ $(y \in E)$ 与空间 E 的点 y 是一一对应的。把函数 k_y 的所有可能极限函数加到函数族 $\{k_y\}$ 之中(换句话说，用按坐标收敛的方法，取函数集的闭包)。根据习题 34 与第一章的习题 4 可知，所得到的函数集 K 是紧集。当把点 $y \in E$ 与它们对应的函数 k_y 等同起来时，就说空间 E 嵌入到紧集 K 中。称集 $B = K \setminus E$ 为马氏链 $X(t)$ 的 Martin 边界。集 B 中的元素与集 E 中的元素一样，或者用一个字母 y 表示，或者为了强调它们是空间 E 上的函数，用符号 $k_y(x)$ 表示。

35. 对任意 $y \in K$，$k_y(x)$ 是过分函数。

如果对每一 x，函数 $p(x, y)$ 仅对有限个 y 的值取非零值，那么，对 $y \in B$，$k_y(x)$ 是调和函数。

提示. 考虑 $x \in B$ 的情形，如果 $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n (y_n \in E)$，那么，根据习题 33 的提示，对任意 $x \in E$，有

$$
\begin{aligned}
k_y(x) &= \lim_{n\to\infty} k_{y_n}(x) = \lim_{n\to\infty} P k_{y_n}(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{z\in E} p(x, z) k_{y_n}(z) \\
&\geqslant \sum_{z\in E} \lim_{n\to\infty} p(x, z) k_{y_n}(z) = P k_y(x).
\end{aligned}
$$

(容易验证，如果变量 $u_n(z)$ 非负且 $u_n(z) \to u(z)$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \sum_z u_n(z) \geqslant \sum_z u(z)).$$

如果和是有限的，那么等号成立。

36. 对于由(34)式给出的测度 μ_n，序列 $\mu_n(E)$ 是有界的。

提示. 在(33)式中，令 $x = 0$。

令 $\mu_n(B) = 0$，把测度 μ_n 延拓到整个紧集 K 上，于是(33)式可以重新写成

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{y\in E} k(x, y)\mu_n(y) + \int_B k(x, y)\mu_n(dy) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_K k(x, y)\mu_n(dy) \qquad (35)
\end{aligned}
$$

的形式，其中 $k(x, y) = k_y(x)$ $(x \in E, y \in K)$。

在紧集 K 的实际结构中，对任意 x，函数 $k(x, y)$ 关于 y 是连续的。根据 Helly 定理[1]，如果 $\{\mu_n\}$ 是紧集 K 上的测度序列，使得 $\mu_n(K)$ 的值有界，那么可以在 K 上构造一个测度 μ 并且可以从 $\{\mu_n\}$ 中取出一子列 $\{\mu_{nk}\}$ 使得对任意连续函数 $F(y)$ $(y \in K)$，有

$$\lim_{k\to\infty} \int_K F(y)\mu_{nk}(dy) = \int_K F(y)\mu(dy).$$

---

1) Helly 对 K 是线段的情形证明了这个定理. 在概率论的任何标准教科书中都可找到这个证明（例如，见[10]中第四章 §11.2）. 比较下面两个事实，容易得到一般的证明. 1) 在紧集 K 上，所有连续函数组成的 Banach 空间 C 中，任一非负线性泛函 l 可以表示为对某个有限测度 ν 的积分，这里 $\|l\| = \nu(K)$（例如，见[25]中 § 56）. 2) 从具有有界范数的线性泛函的任一序列中，可以找出一个弱收敛的子列（例如，见[26]中第三章 §24）.

把这应用到(35)式就得出等式

$$f(x)=\int_K k(x,y)\mu(dy), \tag{36}$$

其中 μ 是 K 上依赖于过分函数 f 的有限测度。

37. 能表示成积分形式(36)且 $\mu(K)<\infty$ 的任一函数 f 是过分函数。

提示. 在非负函数情形，可以变换积分与求和的次序。

用 V 表示满足条件 $f(0)=1$ 的所有过分函数集，易知 V 是一个凸集(见第一章习题)。

38. 任一不恒等于零的过分函数都可表示成 $cf(x)$ 的形式，其中 $f\in V$，$c>0$。

提示. 需要验证： 如果 f 是过分函数且 $f(0)=0$，那么 $f=0$ 处处成立。利用从零可以到达所有状态以及不等式 $M_x f(X(\tau))\leqslant f(x)$ (τ 是任意马尔可夫时间)，容易得到上述事实。

39. 集 V 的所有极点都在函数 $k_y(x)(y\in K)$ 之中。

提示. 设 f 是集 V 的一个极点，在(36)式中令 $x=0$，就得到 $\mu(K)=1$。由于 K 是紧集，所以存在一点 $z\in K$，使得对 z 的任意邻域 U 有 $\mu(U)>0$。如果 $\mu(U)<1$，由表达式

$$f(x)=\mu(U)\frac{\int_U k(x,y)\mu(dy)}{\mu(U)}+\mu(K\setminus U)\frac{\int_{K\setminus U}k(x,y)\mu(dy)}{\mu(K\setminus U)}$$

得到

$$f(x)=\frac{1}{\mu(U)}\int_U k(x,y)\mu(dy)$$

(见习题 37)。显然，当 $\mu(U)=1$ 时，这个等式同样成立。当把 U 收缩到点 z 时，就得 $f(x)=k_z(x)$。

40. 对 $y\in E$，函数 $k_y(x)$ 是集 V 的一个极点。

提示. 对 $y\in E$，有

$$k_y(x)=G\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 只在点 y 有非零值，如果

$$k_y(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x),$$

其中 $f_1, f_2\in V$，$\alpha>0, \beta>0, \alpha+\beta=1$，那么 f_1 与 f_2 也是某两个函数 $\varphi_1\geqslant 0$ 与 $\varphi_2\geqslant 0$ 的位势（见习题 31）．容易验证 $\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2=\varphi$，由此得知 φ_1 和 φ_2 与 φ 成正比．因此，$f_1=f_2=k_y$.

易知 V 中调和函数的子集 H 也是凸集.

41. 集 H 的所有极点都在函数 $k_y(x)$ 之中 $(y\in B)$.

提示. 由于过分函数可以表示成 $G\varphi+h$ 的形式，所以集 H 的极点也是集 V 的极点.

用 B_e 表示边界 B 中对应于 H 的极函数的点所组成之集．据 Choquet 定理[1)]，如果 H 是序列空间中一紧凸集并且 B_e 是 H 的极点集，那么任一 $h\in H$ 可以表示成极函数对于 B_e 上某一有限测度 ν 的积分形式.

因此，任一正调和函数 h 可以表示成

$$h(x)=\int_{B_e} k(x, y)\nu(dy) \tag{37}$$

的形式．而位势 $G\varphi(x)(\varphi\geqslant 0)$ 可表示成

$$G\varphi(x)=\sum_{y\in E} g(x, y)\varphi(y)=\sum_{y\in E} k(x, y)\nu(y)$$

的形式，其中 $\nu(y)=g(0, y)\varphi(y)$，于是对任意过分函数 $f=G\varphi(x)+h$，得到如下表示式：

1) 例如见 [27]，在这篇文章中，对任意局部凸线性拓扑空间证明了这个定理.

$$f(x) = \sum_{y \in E} k(x, y)\nu(y) + \int_{B_e} k(x, y)\nu(dy)$$
$$= \int_{E \cup B_e} k(x, y)\nu(dy),$$

由 Choquet 的另一个定理得知，所得到 $f(x)$ 的表示式是唯一的。

大体上，在第一章的习题中处理了 Martin 边界，在那里对平面上的对称随机徘徊计算过集 B_e（见习题42—47）. 下面一组习题，提供了计算 Martin 边界的另一个有教益的例子.

具有有限多个生成元的自由群上的随机徘徊[28]

具有生成元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的自由群的构造如下：考虑任意长为 n 的一个单词 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$，其中下标取值为 ± 1，$\pm 2, \cdots, \pm m$. 当把两个单词连接在一起时，就得到这两个单词的乘积. 由关系式 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n})^{-1} = a_{-i_n}\cdots a_{-i_2}a_{-i_1}$ 定义逆元素. 单位元素是不含字母的"单词" e. 两个单词确定该群里同一个元素，当且仅当它们中的一个可从另一个通过任意次地插入或删去形如 $a_j a_{-j}$ 的乘积而得到. 对每个元素都存在唯一的一个包含最少字母的确定记法.

设 $p_1, \cdots, p_m, p_{-1}, \cdots, p_{-m}$ 表示和为 1 的正数. 假定在单位时间内单词 g 以概率 p_i 变成单词 ga_i（如果 $g = a_{i_1}\cdots a_{i_n}$，那么对 $i = -i_n$，$ga_i = a_{i_1}\cdots a_{i_{n-1}}$），称如此定义的马尔可夫链为群 G 上的随机徘徊.

42. 从 x 出发，在某个时刻又返回到这个状态 x 的概率 $r(x)$，对所有 $x \in G$ 都是相同的.

43. 如果至少有一个 i 使得 $p_i \neq p_{-i}$，那么 $r(x) < 1$.

提示. 如果 $p_i > p_{-i}$，那么，从某个时刻起，字母 a_i 出现的次数超过字母 a_{-i} 出现的次数的概率为 1（这可由直线上的非对称随机徘徊的不可逆性得到，见第四章 § 4）.

44. 如果所有 p_i 都相等且生成元的个数 $m \geq 2$，那么

$r(x) < 1$.

提示. 一个单词 $x \neq e$ 由添加一个字母后使得最短记法变长的概率为 $(2m-1)/2m$，由减少一个字母后使得最短记法变短的概率为 $1/2m$，并且这事件可归结为半直线上的一个非对称的随机徘徊(见第四章 § 4)。

更细致地考虑表明，只在 $m=1$，$p_1 = p_{-1} = \frac{1}{2}$ 这唯一的情形下，$r(x) = 1$ 才成立. 今后假设 $r(x) < 1$ 并且对群中的元素只用最短的记法。

45. 用从 e 出发在某个时刻到达 a_i 的概率 u_i 来表示 Martin 核 $k(x, y) = k_y(x)(i = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm m)$.

答案. 如果 $x = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$，$y = a_{j_1} \cdots a_{j_s}$ 并且这两个单词从第一字母到第 k 个字母是相同的，而 $i_{k+1} \neq j_{k+1}$，那么

$$k(x, y) = \frac{u_{-i_{k+1}} \cdots u_{-i_n}}{u_{j_1} \cdots u_{j_k}}. \tag{38}$$

46. 序列 $k_{y_1}(x)$，$k_{y_2}(x)$，$\cdots$，$k_{y_n}(x) \cdots$ 对每个 $x \in G$ 收敛，当且仅当 $n \to \infty$ 时，单词 y_n，y_{n+1}，y_{n+2}，$\cdots$ 中从开始起相同字母的个数趋于无穷.

提示. 先验证 $u_i u_{-i} < 1 (i = 1, \cdots, m)$.

由习题 46 可知，Martin 边界的点与无穷长的单词 $y = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \cdots$ 完全一样，其中 $i_k + i_{k+1} \neq 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 所有这样的单词组成 Martin 边界 B. 再利用习题 35 可知，对 $y \in B$，函数 $k_y(x)$ 是调和函数.

47. 对 $y \in B$，函数 $k_y(x)$ 是集 H 的极点(见习题 41).

提示. 设 $y = a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_s} \cdots$，且设

$$k_y(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad (x \in G),$$

其中 $f_1, f_2 \in H$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\alpha + \beta = 1$. 令 $y_s = a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_s}$ $(s = 1, 2, \cdots)$. 由不等式 $f_i(x) \geq M_x f_i(X(\tau))$(见 §3)可知

$$f_i(x) \geq f_i(y_s) \pi_{y_s}(x) \quad (i = 1, 2), \tag{39}$$

其中 $\pi_z(x)$ 是从 x 出发在某个时刻到达 z 的概率 ($x, z \in C$).
如果单词 x 包含 n 个字母且 $n \leqslant s$, 那么, 利用(38)式可知.

$$k_y(x) = \pi_{y_s}(x) k_y(y_s), \tag{40}$$

因此,对 $n \leqslant s$, 有

$$k_y(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \geqslant \pi_{y_s}(x)[\alpha f_1(y_s) + \beta f_2(y_s)] = \pi_{y_s}(x) k_y(y_s) = k_y(x).$$

因而当 $n \leqslant s$ 时, (39)式中实际上是等号. 再结合(40)式就得到比例

$$\frac{f_i(x)}{k_y(x)} = \frac{f_i(y_s)}{k_y(y_s)} \quad (n \leqslant s),$$

从而易知 $f_1(x) = f_2(x) = k_y(x)$. 因此, 在我们所考虑的情形中有 $B_e = B$.

48. 所有正调和函数可根据下列关系式得到,

$$f(e) = \nu$$

$$f(a_{i_1} \cdots a_{i_n}) = \frac{\nu(i_1, \cdots, i_n)}{u_{i_1} \cdots u_{i_k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{-i_{k+1}} \cdots u_{-i_n}}{u_{i_1} \cdots u_{i_k}} [\nu(i_1, \cdots, i_k) - \nu(i_1, \cdots, i_k, i_{k+1})],$$

其中 ν 和 $\nu(i_1, \cdots, i_n)$ 是满足关系式

$$\nu(i_1, \cdots, i_n) = \sum_{i_{n+1}=1}^{m} \nu(i_1, \cdots, i_n, i_{n+1}) + \sum_{i_{n+1}=-1}^{-m} \nu(i_1, \cdots, i_n, i_{n+1})$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(当 $n = 0$ 时,把 $\nu(i_1, \cdots, i_n)$ 理解为数 ν) 的任意非负数.

提示. 用(37)和(38)式.

第四章　边界条件

§1. 引　　言

微分方程理论中的基本问题之一，是方程的边界值问题．利用概率论的方法来研究这个问题是非常有效的．从概率论的观点看，我们所讨论的是在一个区域的边界上，扩散过程的轨道状况．为了抓住问题的中心，我们来分析平面上由某条曲线所围成的区域G内的 Wiener 过程(图 33)．只要质点不离开区域 G，那么它的运动就由特征算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 所支配，其中 Δ 是 Laplace 算子(见第二章 §9)．当质点离开区域的边界时，会发生什么情况呢？

想象得出，当质点到达边界时，它可能又重新返跳到区域内的一定点 y．由于在区域G内其运动规律已知，所以这个过程的下一步运动是完全确定的．这种情形的明显推广是质点以概率 π 返跳到G内(一般说来，π 与边界点 r 有关)．在第三章还谈到过其他一些可能，如质点在首次到达边界时被**吸收**(在它首次到达的边界点上停留不动)和**消失**，最后，边界的一种基本效应是**反射**．对于一个在半平面内的过程可定义最简单的反射，例如，如果G是半平面 $x_1>0$，首先需要分析 $X(t)$ 在整个平面上的轨道，然后将位于左半平面 $x_1<0$ 内的那部分轨道关于 x_2 轴对称地进行反射 (图 34)．

只要在区域G内，过程就由算子 $(1/2)\Delta$ 所确定．在到达边界之后，过程的各种连续性，从分析上说，是用**边界条件**来

描述的．在计算区域边界点上的特征算子 $\mathfrak{A}$ 时就会出现这些条件．

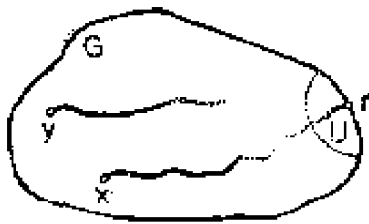


图 33

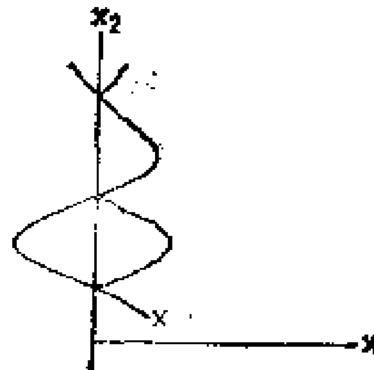


图 34

回想 $\mathfrak{A}$ 的定义，

$$\mathfrak{A}f(x)=\lim_{U\downarrow x}\frac{M_xf(X(\tau))-f(x)}{M_x(\tau)},\qquad(1)$$

其中 τ 是首次离开点 x 的邻域 U 的时间．

如果吸收发生在边界 r 处，那么(1)式中的分母在 $x=r$ 时将变为 ∞，于是得到边界条件

$$\mathfrak{A}f(r)=0.\qquad(2)$$

为了得到返跳到点 y 的边界条件，先假定质点在跳回到点 y 之前，在边界点 r 处停留了一段时间 ξ，这里 ξ 是随机变量，其分布为 $P_r\{\xi>t\}=e^{-at}$[1]．这时，对点 r 的一个不含 y 的邻域 U，时间 τ 与 ξ 重合，并且

$$M_r\tau=M_r\xi=\frac{1}{a}.$$

因为 $f(X(\tau))=f(y)$，于是由(1)式可知

$$\frac{1}{a}\mathfrak{A}f(r)=f(y)-f(r).$$

1）只有这种类型的分布才能保证过程具有马尔可夫性，见§2(143—145页)．

如果让 a 趋于无穷，那么在这极限过程中 ξ 将趋于零，并且得到一个从 r 到 y 的瞬间返跳．这时上面的式子就变成了边界条件

$$f(r)-f(y)=0.$$

如果从 r 跳向的点 y 是随机的，其分布为 $\pi(r)$，那么由类似的考虑可以得到更一般的边界条件

$$f(r)-\int_G f(y)\pi(dy)=0, \tag{3}$$

或等价地

$$\int_G [f(r)-f(y)]\pi(dy)=0. \tag{4}$$

在边界上具有消失的过程可以看作是当测度 π 为零时返跳过程的一种退化情形．在这种情况下，由(3)式可以得到下面边界条件

$$f(r)=0. \tag{5}$$

最后，在区域 G（图 34）的边界 $x_1=0$ 上的反射，其相应边界条件为

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(r)=0. \tag{6}$$

为了更好地理解这一条件，我们注意，从一个返跳经过取极极可以得到反射，即考虑质点从边界点 r 沿 x_1 轴的方向返跳到距离为 h 的地方，然后令 h 趋于零．当向右返跳距离为 h 时，边界条件具有

$$f(h,x_2)-f(0,x_2)=0$$

的形式，其中 x_2 是边界点 r 的纵坐标．用 h 除这个式子且令 $h\downarrow 0$ 取极限就得到边界条件 (6)．

除了上述这些简单的边界条件外，还可以引进一些更复杂的条件．关于描述最一般的边界条件的问题至今已有了相当大的进展． 然而只在一维情形才得到彻底的解决． 设

$X(t)$ 是半直线 $(-\infty, 0]$ 上的一个 Wiener 过程，$X(t)$ 在点 0 的最一般条件为

$$\beta \mathfrak{A} f(0) + \alpha f'(0) + \gamma f(0) + \int_{-\infty}^{0} [f(0) - f(y)] \pi(dy) = 0, \qquad (7)$$

其中 α, β 和 γ 为非负常数，π 是半直线 $(-\infty, 0)$ 上的测度，它满足

$$\pi((-\infty, -1)) - \int_{-1}^{0} y \pi(dy) < \infty.$$

数 α, β, γ 和 $\delta = \pi((-\infty, 0))$ 不能同时为零。如果 $\alpha = \gamma = \delta = 0$，$\beta \neq 0$，那么 (7) 式变成条件(2)，即吸收情形。当 $\alpha \neq 0$，$\beta = \gamma = \delta = 0$ 时，得到类似于(6)式的条件，即反射。$\gamma \neq 0$；$\alpha = \beta = \delta = 0$ 的情况，归结为形如 (5)式的条件，它对应于消失。如果 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 且 $0 < \delta < \infty$，那么，用 δ 除(7)式就得到形如 (4) 的条件，即得到一个分布为 π/δ 的返跳。在一般情况下，我们得到的是所有这些效果的某一组合。(在§8对具有无穷测度的边界条件将给出一个直观的解释。)

由 Wiener 过程转变到对应于算子

$$L = a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

的扩散过程(参见第二章§9)，将得到某些新的和有趣的结果。这时边界条件(7)中的一些情形是不允许出现的，能否出现取决于系数 $a(x)$ 与 $b(x)$ 的性质。从概率论的观点看，这情形相当于质点轨道不能到达点 0，这时过程由算子 $\mathfrak{A}$ 唯一确定而没有任何边界条件。但是，既使可以到达边界，反射也不总是可能的。

在这章，我们分析边界条件时，不讨论扩散过程，而只讨论其离散的类似，即生灭过程。这样可以用比较初等的方法

(不用微分算子，而用差分算子)来研究过程的轨道，而又不会改变概念的实质[1]。

§2. 生灭过程

Wiener 过程的一个典型的离散模型是整数值点格上的对称随机徘徊. 从第一章起我们就已经很熟悉它了. 为了得到任意一个一维扩散过程的离散类似 $X(t)$，需要放弃随机徘徊的对称性，假定从一点 n 跳到它的邻点 $n-1$ 和 $n+1$ 的概率不等于 1/2，而是分别等于任意数 q_n 和 p_n，这里 q_n 和 p_n 满足条件

$$p_n \geqslant 0,\ q_n \geqslant 0,\ p_n + q_n = 1 \tag{8}$$

(图 35). 然而，即使有了这个假设，由于在这个模型中质点两次连续移动之间的时间是固定的且等于 1，这仍然过于简单以至于不能说明在扩散理论中会出现的许多重要结果. 为此，我们假定时间参数 t 和在 Wiener 过程中一样是连续变化的，不限制它仅取整数值.

可以证明，如果质点从到达一个状态到离开这个状态所需的时间 ξ_n 服从指数分布



图 35

1) 在[29]中用另一种观点讨论了这个同样的问题. 王梓坤在他的一篇未发表的论文中，从具有一给定分布的返跳情形出发，通过取极限的办法描述了这些过程. [注]

[注] 王梓坤的文章已发表在《数学进展》5:2 (1962 年)第 137—179 页，题目是“生灭过程的构造论”. ——译注

$$P\{\xi_n \geqslant t\} = e^{-a_n t} \quad (t \geqslant 0), \tag{9}$$

其中

$$0 < a_n < \infty, \tag{10}$$

(而且它与质点以前的状态无关)，那么随机过程 $X(t)$ 具有马尔可夫性. 这表明,在 $X(s)=n$ 的条件下，过程 $Y(t)=X(s+t)$与时刻 s 以前 $X(t)$ 的状况无关,并且与在时刻 0 处于状态 n 的过程 $X(t)$ 有相同的概率分布.

读者可能会问,在 $X(0)=n$ 的条件下,对离开状态 n 的时间 ξ_n 来说,是否可以考虑其它类型的分布? 下面将证明,如果 $X(t)$ 是马尔可夫过程,那么 ξ_n 一定服从指数分布.

事实上,设 $p(t)$ $(t>0)$ 是在 $X(0)=n$ 的条件下事件 $\{X(u)=n,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$ 的概率. 对任意 $s,\ t>0$，事件 $\{X(u)=n,\ 0\leqslant u\leqslant s+t\}$ 是事件 $\{X(u)=n, 0\leqslant u\leqslant s\}$ 与 $\{Y(u)=n,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$ 的交，其中 $Y(u)=X(s+u)$. 因此,如果具有马尔可夫性,那么

$$p(s+t)=p(s)p(t) \quad (s,\ t>0). \tag{11}$$

方程(11)的全部有界解具有

$$p(t)=e^{-a_n t}$$

的形式,其中 a_n 是一常数，且 $0\leqslant a_n\leqslant +\infty$ (见附录 § 3). 由事件的包含关系

$$\{X(u)=n,\ 0\leqslant u\leqslant t\}\subset\{\xi_n\geqslant t\}\subset\{X(u)=n, 0\leqslant u\leqslant t-h\} \quad (0<h<t)$$

可知

$$p(t)\leqslant P_n\{\xi_n\geqslant t\}\leqslant p(t-h) \quad (0<h<t).$$

令 $h\downarrow 0$ 就得到 $P_n\{\xi_n\geqslant t\}=p(t)$. 因此，$\xi_n$ 具有指数分布 (9)，其中 $0\leqslant a_n\leqslant +\infty$.

如果 $a_n=+\infty$，那么 $\xi_n=0$ 的概率为 1，质点立刻从状态 n 离开. 反之，如果 $a_n=0$，那么 $\xi_n=+\infty$ 的概率

为1，质点总不离开 n. 这两种极端情况都有可能发生，但意义不大，因此，今后将不再加以讨论.

由(9)式可知，时间 ξ_n 的均值等于 $1/a_n$.

为了避免两个边界条件(在点 $-\infty$ 和 $+\infty$)都出现，假定随机徘徊只经过状态 $0, 1, 2, \cdots n, \cdots$ 使得

$$q_0 = 0, \quad p_0 = 1. \tag{12}$$

另外，用

$$q_n > 0, \quad p_n > 0, \quad p_n + q_n = 1 \ (n > 0) \tag{13}$$

代替(8)式，这样就有可能从任一非零状态出发，向右或者向左运动.

最后，我们规定，从 n 到 $n \pm 1$ 转移的瞬间，质点是处在点 $n \pm 1$ 而不是在点 n 处. 这表明，我们把质点的轨道 $X(t)$ 看作是 t 的右连续函数. 可以证明，在这种情况下，我们的过程不仅有马尔可夫性，而且有强马尔可夫性. 后者可由任一马尔可夫时间 τ 代替马尔可夫性中的固定时间 s 得到(见第二章§3和第三章§2中相应的定义).

这样，我们感兴趣的过程 $X(t)$ 是由满足条件(10)，(12)和(13)的数组 p_n，q_n 和 $a_n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 所决定，并且取下面的形式. 质点开始时处在某一状态 x_0，在时刻 τ_1 转移到新的状态 x_1，其中 τ_1 服从参数为 a_{x_0} 的指数分布. 这里 $x_1 = x_0 - 1$ 的概率为 q_{x_0}，$x_1 = x_0 + 1$ 的概率为 p_{x_0}. 然后质点留在 x_1，到了时刻 τ_2，它转移到下一状态 x_2，这时 $\tau_2 - \tau_1$ 服从参数为 a_{x_1} 的指数分布，$x_2 = x_1 - 1$ 的概率为 q_{x_1}，$x_2 = x_1 + 1$ 的概率为 p_{x_1}. 一般说来，在时刻 τ_n，质点从 x_{n-1} 转移到 x_n，这时 $\tau_n - \tau_{n-1}$ 服从参数为 $a_{x_{n-1}}$ 的指数分布，$x_n = x_{n-1} - 1$ 的概率为 $q_{x_{n-1}}$，$x_n = x_{n-1} + 1$ 的概率为 $p_{x_{n-1}}$. 如此下去直到无穷. 这样构造的轨道 $X(t)$ 是定义在一端为随机变量的区间 $[0, T)$ 上的，其中

$$T = \lim_{n\to\infty} \tau_n \tag{14}$$

是累积跳跃时间.

称上面描述的过程为生灭过程. 所以有这个名称是因为我们把 $X(t)$ 解释为在时刻 t 某种个体的个数. 当质点向右跳一个单位,相当于出生一个新的个体,而当质点向左跳一个单位,相当于一个个体死亡.由于从状态 n 只能跳到它邻近的状态 $n+1$ 和 $n-1$, 于是在这样的一个模型中, 同时出生(或死亡)两个或更多个个体的概率为零. 从生物学应用的观点来说, 这个限制可能有些过分, 然而正是这个条件提供了一个具有状态空间 $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 的过程, 它与在半直线$[0, +\infty)$上具有连续轨道(即从点 x 到点 y 的转移一定要通过所有中间的状态)的扩散过程相类似.

如果不去考虑生灭过程在生物学上的含义, 我们就可以把这个过程的状态从整数点 $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$. 改换成任意单调序列 $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots$. 这时生灭过程就是在区间 $[u_0, r)$ 上的扩散过程的离散类似,其中 $r = \lim_{n\to\infty} u_n$. 点 r 相当于状态空间 $\{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$ 的唯一边界点.

当跳动很紧凑时(即当 $T < \infty$ 的情况下),我们来寻找时刻 T 以后过程 $X(t)$ 的连续性条件. 这相当于研究在点 r 处的边界条件. 我们必须先来找出使得 $T < \infty$的概率大于零的条件. 在开始这几节我们说明怎样计算质点离开区间的概率以及离开时间的均值,这对研究边界条件也是有用的.

§ 3. 标准尺度与离开概率

在 § 2 所给出的关于生灭过程的描述中, 显而易见,由质点相继到达的状态序列 $X_0, X_1 \cdots, X_n, \cdots$ 组成一马尔可夫

链其状态空间 $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，转移概率为

$$p(n, n-1) = q_n,$$
$$p(n, n+1) = p_n,$$
$$p(n, m) = 0 \quad (|m-n| \neq 1).$$

如果我们研究这个链的构造，就能回答许多与生灭过程 $X(t)$ 有关的问题．例如，确定在到达另一状态前先到达某一状态的概率；迟早要到达一给定状态的概率等等．当然，所有涉及到质点在这些状态之间移动速度的问题仍未解决，而回答这些问题还需要考虑常数 a_n 的值．

假定对所有 $n \geqslant 1$，有 $p_n = q_n = 1/2$，于是这个马尔可夫链 X_n 是半直线$[0, \infty)$上以零点为反射壁的 Wiener 过程的离散类似．(为了产生一个以零点为反射壁的 Wiener 过程，只需考虑过程 $|X(t)|$，其中 $X(t)$ 是整个直线上的 Wiener 过程．)此外，从一个具有反射的 Wiener 过程也可以直接得到这个链．确切地说，由 Wiener 轨道相继到达不同整数值点构成此链． 事实上，在到达任意整数值点 $n \geqslant 1$ 以后，Wiener 轨道以 1/2 的概率到达整数值点 $n-1$ 并且以1/2的概率到达整数值点 $n+1$ (但从零到达 1 是必然的)． 然而，并不一定只在整数值点上来分析 Wiener 轨道．如果我们分析到达任意等距离点 $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots$的



图 36

Wiener 质点，也可以得到具有相同转移概率的马尔可夫链．

如果不按等距离选取这些点(图 36)会出现什么情况呢？最终结果是这个链具有状态空间 $u_0 = 0, u_1, \cdots, u_n \cdots$，并且从 u_n 向左和向右转移的概率 q_n 与 p_n 分别为

$$q_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} - u_{n-1}},$$

$$p_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n+1} - u_{n-1}} \tag{15}$$

(见第三章§7(17)式)．如果我们安排点u_n使得根据(15)式所计算出来的概率q_n和p_n与一个给定的生灭过程中的概率q_n和p_n一致，那么具有反射壁的Wiener过程在状态$\{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$上导出的马尔可夫链与由生灭过程在状态$\{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$上所生成的马尔可夫链完全相同．

为了确定起见，令$u_1 = 1$由(15)式我们可以相继求出u_n．令

$$\delta_n = u_{n+1} - u_n \quad (n \geqslant 0) \tag{16}$$

是相邻两点间的距离．由(15)式可知

$$\delta_n = \frac{q_n}{p_n}\delta_{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

因此，有

$$\delta_n = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} \quad (n \geqslant 1). \tag{17}$$

最后，得到

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_n = \delta_0 + \cdots + \delta_{n-1} = 1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{p_1 \cdots p_{n-1}} \tag{18}$$

$$(n \geqslant 1).$$

称数u_n为状态n的标准坐标，称u轴以及在它上面的点$u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$为生灭过程的标准尺度，我们首先只在标准尺度下来研究这个过程，并且不在整数值点上而是在点u_n上考虑质点$X(t)$或X_n的移动．约定用E表示状态空间$\{u_0,$

$u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$. 注意，用标准尺度来描述与用常数 q_n 和 p_n 来描述是等价的。

在前面整数值尺度下，状态有一极限点 $+\infty$，在标准尺度下，这个极限对应于数

$$r = \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}, \tag{19}$$

称 r 为状态空间 E 的**边界**. 边界 r 可以取有限值，也可以取无限值.

例如，如果对一切 $n \geq 1$，有 $p_n = p$，$q_n = q$，那么级数(19)是等比级数，因而，当 $p > q$ 时，$r = \frac{p}{p-q}$；当 $p \leq q$ 时，$r = \infty$. 在原来尺度下，当 $p < q$ 时，质点有向左迁移的趋势；当 $p > q$ 时，有向右的趋势。在标准尺度下，在上述两种情形中，平均来说，质点向左和向右作等距离摆动. 显然，当 $p > q$ 时，状态更密集于右边；而当 $p < q$ 时，在左边.

现在我们致力于找出马尔可夫链 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 的离开概率. 当然，一旦已知 Wiener 过程从区间离开的概率，就容易得到这个链的离开概率. 然而，我们希望不依赖于 Wiener 过程来计算这些概率，因为方程(20)的一般解，在以后将会用到.

我们把满足不等式 $\alpha < u_k < \beta$ (α 与 β 是给定的数)的一组状态看作是状态空间 E 中的一个区间 I. 由区间 I 在它左右两边各加上一个相邻状态(如果这样状态存在)所生成的区间称为扩充区间 $\bar{I}$. 例如，设 $I = \{u_3, u_4\}$，那么 $\bar{I} = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$；如果 $I = \{u_0, u_1\}$，那么 $\bar{I} = \{u_0, u_1, u_2\}$；如果 I 为整个状态空间 E，那么 $\bar{I} = I$.

设 $p(u)$ $(u \in \bar{I})$ 是质点在初始时处于状态 u 而在它首次

从区间 I 离开时到达了某一固定状态的概率．根据全概率公式，有

$$p(u_n)=q_n p(u_{n-1})+p_n p(u_{n+1})\quad (u_n\in I).\tag{20}$$

下面讨论方程(20)的解．如果 $n\neq 0$，那么，根据(15)和(16)式有

$$q_n=\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}+\delta_n},$$

$$p_n=\frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-1}+\delta_n},\tag{21}$$

并且方程(20)具有

$$\frac{p(u_{n+1})-p(u_n)}{\delta_n}=\frac{p(u_n)-p(u_{n-1})}{\delta_{n-1}}\tag{22}$$

的形式；而当 $n=0$ 时，有 $q_n=0$，$p_n=1$，因此，有 $p(u_1)$ $p(u_0)$ 或者为一致起见，有

$$\frac{p(u_1)-p(u_0)}{\delta_0}=0.\tag{23}$$

函数 $p(u)$ 仅对离散的点列 $u_n\in\bar{I}$ 才有意义．扩大这个函数的定义，使得它在每一区间 (u_n, u_{n+1}) 上是线性函数(图 37)，其中 $u_n, u_{n+1}\in\bar{I}$．于是分式 $[p(u_{n+1})-p(u_n)]/\delta_n$ 有一个简单的几何解释，它等于 $p(u)$ 的图象在区间 (u_n, u_{n+1})上的斜率，即当 $u\in(u_n, u_{n+1})$ 时，它等于 $p'(u)$．为了强调这个导数与标准尺度 u 有关，记这个导数为 $D_u p$．导数

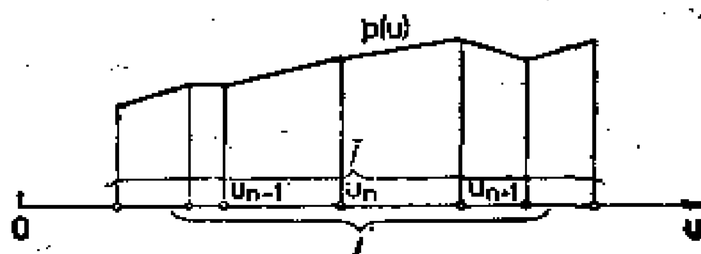


图 37

$D_u p$ 在点 $u = u_n$ 处没有定义.

方程(22)表明,图象上对应于点 u_n 的两个相邻线段有相等的斜率. (23)式告诉我们这个折线图象的第一个线段是水平的. 因此,如果 $u_0 = 0 \in I$, 那么 $\bar{I}$ 上所有线性函数都是方程(20)的解;如果 $0 \notin I$, 那么解是 $\bar{I}$ 上的常值函数.

假设区间 I 不包含状态零且由有限个状态组成. 这时质点在离开 I 的时刻 τ 可以位于与 I 相邻, 且和它一起构成扩充区间 $\bar{I}$ 的两个状态 $a<b$ 中的一个(假定初始状态 u 属于 $\bar{I}$). 事件 $X(\tau) = a$ 和 $X(\tau) = b$ 的概率分别记为 $q(u; a, b)$ 和 $p(u; a, b)$. 根据前面的讨论, 这两个函数都是区间 $a \leqslant u \leqslant b$ 上的线性函数. 而且它们在这个区间端点的值是已知的: $q(a; a, b) = p(b; a, b) = 1$, $q(b; a, b) = p(a; a, b) = 0$. 因此,有

$$q(u;a,b) = \frac{b-u}{b-a},$$

$$p(u;a,b) = \frac{u-a}{b-a} \tag{24}$$

$$(a \leqslant u \leqslant b)$$

(图 38). 和所期望的一样,我们得到了与直线上 Wiener 过程同样的关系式.

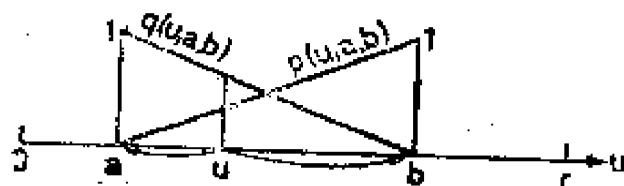


图 38

如果区间 I 包含状态 0 并且在右边以状态 b 为界, 那么从点 b 离开的概率 $p(u;b)$ 在区间 $0 \leqslant u \leqslant b$ 上为常数. 因为在 $u = b$ 时,它等于 1, 所以

$$p(u;b) = 1 \tag{25}$$

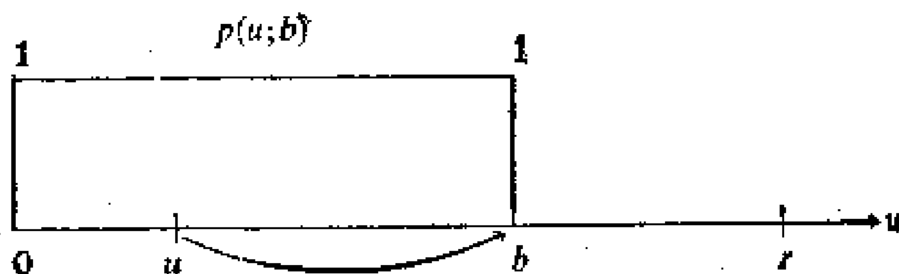


图 39

(图 39). 因此,质点到达任意远的状态 b 的概率为 1.

最后, 我们来考虑一个包含状态 a 右边的所有状态的区间 I, 即这个区间介于状态 a 与状态空间的极限点 r 之间. 对于离开 I 到达点 a 的概率 $q(u;a,r)$ 来说,我们只有一个在点 a 的边界条件[1]. 因此,我们通过取极限来求 $q(u;a,r)$. 注意到事件 $A_b=\{$在序列 $X_0=u, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$中状态 a 出现在状态 b 之前$\}$随 b 增加而变大. 并且它们的并是事件 $A=\{$在序列 $X_0=u, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$中状态 a 出现$\}$. 所以,

$$q(u;a,r)=P_u\{A\}=\lim_{b\uparrow r} P_u\{A_b\}=\lim_{b\uparrow r} q(u;a,b),$$

由(24)式得到[2]

$$q(u;a,r)=\begin{cases}\dfrac{r-u}{r-a} & \text{当 } r<\infty \\ 1 & \text{当 } r=\infty\end{cases} \tag{26}$$

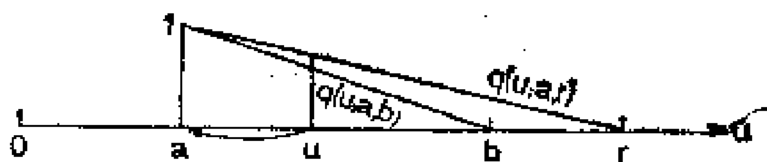


图 40

1) 如果 $r=\infty$, 在 r 点的边界条件可取为函数 q 的有界性;然而,当 $r<\infty$ 时,有界性不能保证 q 的唯一性.

2) 通常 P_u 和 M_u 表示关于初始状态 u 的概率和均值.

(图40)．完全类似地，如果把 $p(u; a, r)$ 看作是从 u 出发到达任意远的状态而从未到达 a 的概率，那么

$$p(u; a, r) = \lim_{b \uparrow r} p(u; a, b)，因而$$

$$p(u; a, r) = \begin{cases} \dfrac{u-a}{r-a} & 当\ r < \infty \\ 0 & 当\ r = \infty \end{cases} \tag{27}$$

(图41)．



图 41

§4. 排斥 (repelling) 边界和吸引 (Attracting) 边界

当 $n \to \infty$ 时，一个马尔可夫链

$$X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots \tag{28}$$

的状况（从而，生灭过程 $X(t)$ 当 $t \uparrow T$ 时的状况）与数 r 是有限还是无限有很大关系．

先假设 $r = \infty$．这时由(25)和(26)式可知，从任意状态 u 出发的质点在某个时刻到达任意其它状态的概率为 1．于是质点从 u 转到 v，再由 v 转到 u 的概率为 1．因此，质点从 u 出发再返回 u 的概率等于 1（通常称此链为常返的）．显然，如果这个链是常返的，那么任一固定状态，例如 $u_0 = 0$，在序列(28)中出现无穷次（每一次从 0 离开再回到 0）的概率为 1．由于无穷多次返回到 0 致使序列(28)不会趋于极限 r，所以 X_n 趋于 r 的概率为 0．这时就说边界排斥质点．

如果 $r<\infty$，那么从(26)式可知，给定一状态 a，从 a 的右边任意状态出发到达 a 的概率小于 1．因为从 a 出发到达它的右边的概率是大于 0 的，这表明从 a 出发再返回到 a 的概率 β 是小于 1 的(这个链 $\{X_n\}$ 是非常返的)．于是从 a 出发至少 m 次返回到 a 的概率为 β^m (这里概率相乘是因为相应的事件是独立的)．所以，无穷多次返回到 a 的概率为

$$\lim_{m\to\infty}\beta^m=0.$$

因此，在序列(28)中到达状态 a 有限次的概率为 1．因为状态的个数只有可数个，所以有限次到达每一状态的概率也为 1．但是如果在序列(28)中每一状态都有限次到达，那么这个序列必然趋于极限 r．因而，有

$$P\{\lim_{n\to\infty}=r\}=1, \tag{29}$$

或者可以这样说，边界吸引质点．

综上所述，当 $r=\infty$ 时，过程是常返的且有一排斥边界；当 $r<\infty$ 时，它是非常返的且有一吸引边界．

关于边界的进一步分类依赖于质点在这些状态之中转移速度．因此我们必须从链 $\{X_n\}(n=0,1,2,\cdots)$ 回到原来的生灭过程 $X(t)(0\leqslant t\leqslant T)$．

§5. 特征、平均离开时间和速度测度

回想对直线上的 Wiener 过程，我们是如何确定质点从一个区间离开的平均时间的．根据第二章§8的结果，从 x 出发到达端点 a 或 $b\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 的平均时间 $m(x;a,b)$ 可通过将函数 $-x^2$ (它一经选定便不改变) 与一线性函数相加使得 $m(x;a,b)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 为 0 而得到．几何上可用抛物线 $y=-x^2$ 与一弦之间的垂直线段来表示，这弦连

结抛物线上横坐标为 $x=a$ 与 $x=b$ 的两点（图 42）。也可以说，$m(x;a,b)$ 是 Poisson 方程

$$\frac{d^2}{dx^2}m=-2$$

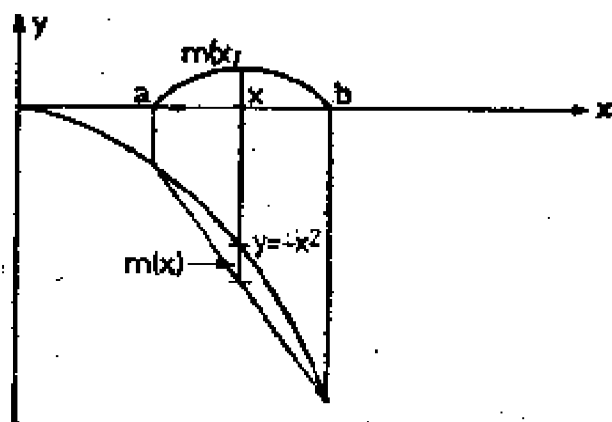


图 42

的解，此解在点 a 和 b 满足零边界条件（在一维的情形 $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}$）。下面会看到，生灭过程的情形和这类似，只是将抛物线 $y=-x^2$ 用某些折线来代替，且对不同的过程这些折线也不同。

设 I 是生灭过程 $X(t)$ 的某个状态区间，用 $m(u)$ 表示开始时处在状态 u 的条件下质点离开 I 的时间 τ 的均值。这时，我们假定，当 $X(0)\bar{\in}I$ 时，$\tau=0$；而当 $X(t)\in I$，$t<T$，时，$\tau=T$。特别，T 是从整个状态空间 $E=\{u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots\}$ 首次离开的时间。

我们先证明，对只有有限个状态的区间 I，平均时间 $m(u)$ 是有限的。在任意一段固定时间 $t>0$ 内，从任意给定状态 u 出发到达任意其它状态 a 的概率可以是大于零的（这可由 §2 中生灭过程的定义看出）。当把 a 选在 I 外时，对任意 $u\in I$，有

$$P_u\{\tau < t\} > 0.$$

因为区间 I 的状态个数有限，所以

$$\alpha = \min_{u \in I} P_u\{\tau < t\} > 0.$$

现在用下面一般性的论述来证明不等式 $m(u) < \infty$.

设 I 是任意状态集，τ 是首次离开 I 的时间. 如果存在某个时刻 $t < \infty$，对所有状态 $u \in I$，有

$$P_u\{\tau < t\} \geqslant \alpha > 0,$$

那么，对 $u \in I$，有 $P_u\{\tau < \infty\} = 1$，且 $M_u \tau < \infty$.

为了证明这个断言，假设 $p(u, v)$ $(u, v \in I)$ 表示在时刻 t 内质点从 u 到 v 且一直没有离开 I 的概率. 据假设，有

$$\sum_{v \in I} p(u, v) = P_u\{\tau > t\} \leqslant 1 - \alpha \ (u \in I),$$

用此估计，得到

$$P_u\{\tau > 2t\} = \sum_{v \in I} p(u, v) P_v\{\tau > t\}$$

$$\leqslant (1-\alpha) \sum_{v \in I} p(u, v) \leqslant (1-\alpha)^2.$$

一般地，用归纳法，有

$$P_u\{\tau > nt\} \leqslant (1-\alpha)^n \ (u \in I). \tag{30}$$

因为 $\alpha > 0$，由(30)式可知，当 $n \to \infty$ 时，$P_u\{\tau = \infty\} = 0$. 而且

$$M_u \tau \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t P_u\{nt < \tau \leqslant (n+1)t\}$$

$$\leqslant t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_u\{nt < \tau\}$$

$$\leqslant t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-\alpha)^n < \infty$$

$$(u \in I).$$

当 $m(u)<\infty$ 时，可以导出一个关于函数 $m(u)$ 的方程．由于在 u_n 处平均逗留时间等于 $1/a_n$，在这段时间以后，质点将分别以概率 q_n 和 P_n 转移到 u_{n-1} 和 u_{n+1}，然后过程的状况又从这些状态开始，于是对每一个 $u_n\in I$，有

$$m(u_n)=\frac{1}{a_n}+q_n m(u_{n-1})+p_n m(u_{n+1}). \tag{31}$$

显然，在区间 I 上方程(31)的两个解的差满足 I 上相应的齐次方程，即在 § 3 研究过的方程 (20)．回忆方程(20)的解是扩充区间上的线性函数，如果区间 I 含有点 0，那么在 $\bar{I}$ 上解只能是常数函数．因此，为了求出在任意区间 I 上方程(31)的全部解，只需找出它在整个状态空间 E 上的某个特解．

下面较仔细地考察方程(31)的解 $S_n=S(u_n)$，使得它满足下面的初始条件

$$S_0=0. \tag{32}$$

把方程(31)用 S_n 重写成

$$(S_{n+1}-S_n)p_n=(S_n-S_{n-1})q_n-\frac{1}{a_n} \tag{33}$$

的形式．当 $n\neq 0$ 时，把概率 q_n 与 p_n 用距离 $\delta_n=u_{n+1}-u_n$ 表示如下：

$$p_n=\frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-1}+\delta_n},$$

$$q_n=\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}+\delta_n} \tag{34}$$

(见 § 3 的(21)式)．把这些表达式代入(33)式，就得到

$$\frac{S_{n+1}-S_n}{\delta_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{\delta_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\frac{\delta_{n-1}+\delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}. \tag{35}$$

(35) 式中前两个分式表示导数 D_uS 在相邻区间 (u_n, u_{n+1}) 和 (u_{n-1}, u_n) 上的值(和 § 3 一样，假定函数 $m(u)$ 与 $S(u)$ 的定义用线性内插法扩充到这些状态之间) (图 43)．为了记号简

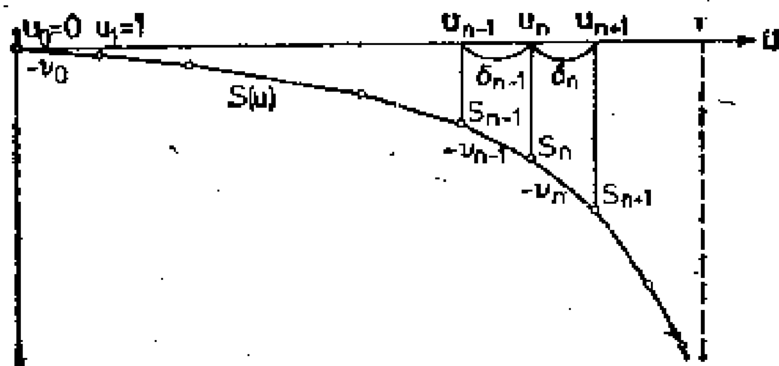


图 43

便，令

$$D_u S(u) = -v(u) \tag{36}$$

且用 v_n 表示 $v(u)$ 在区间 (u_n, u_{n+1}) 上的值．于是方程(35)表明

$$v_n = v_{n-1} + 2\mu_n \quad (n \geqslant 1), \tag{37}$$

其中

$$2\mu_n = \frac{1}{a_n} \frac{\delta_{n-1} + \delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n} \tag{38}$$

是一个已知的量(写成 2 倍的形式是为了以后对 μ_n 给予更简单和更直接的解释)．用完全同样的方法，当 $n = 0$ 时从(33)式得到

$$v_0 = 2\mu_0, \tag{39}$$

其中

$$2\mu_0 = \frac{1}{a_0}. \tag{40}$$

由方程(37)，(36)以及初始条件(39)，(32)可知

$$v_n = 2\sum_{k=0}^{n} \mu_k \quad (n \geqslant 0),$$

$$S_n = -\sum_{m=0}^{n-1} v_m \delta_m$$

$$= -2 \sum_{0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n-1} \mu_k \delta_m \quad (n \geqslant 1).$$

因为

$$\delta_0 = 1, \ \delta_m = \frac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m} \quad (m \geqslant 1)$$

(见 § 3 (17)式)，所以利用(38)式，有

$$2\mu_k = \frac{1}{a_k} \frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k} \quad (k \geqslant 1).$$

最后，得到

$$v_n = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k} \quad (n \geqslant 0), \tag{41}$$

$$S_n = - \sum_{0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n-1} \frac{1}{a_k} \frac{q_{k+1} \cdots q_m}{p_k \cdots p_m} \quad (n \geqslant 1). \tag{42}$$

称函数 $S(u)$ 为生灭过程 $X(t)$ 的**特征**．由(42)式显而易见，对 $u > 0$，$S(u)$ 是负的且单调递减．(37)式表明，质点在通过每个状态 u_n 时，$S(u)$ 的导数 $-v(u)$ 也是递减的．因此，$S(u)$ 是上凸函数．

由于函数 $S(u)$ 与 $v(u)$ 是单调的，所以当 $u \uparrow r$ 时，极限存在，或取有限值或取无穷值．分别记这两个极限为 $S(r)$ 和 $v(r)$．从几何上显而易见，当 $r = \infty$ 时，$S(r) = -\infty$ (比较(41)与(42)式，这也是显而易见的)．

用 $m(u; a, b)$ 表示质点从状态 u 出发到达状态 a 与 $b(a \leqslant u \leqslant b)$ 之一的平均时间；用 $m(u; b)$ 表示质点从状态 u 出发到达状态 $b(u \leqslant b)$ 的平均时间．当 $a < u = u_n < b$ 时，函数 $m(u; a, b)$ 满足(31)式且在点 a 和 b 处为零．再利用同一方程的性质可知，差 $m(u; a, b) - S(u)$ 在扩充区间 $a \leqslant u \leqslant b$ 上是线性函数，且在点 a 与 b 处这个差分别为 $-S(a)$ 与 $-S(b)$．构造这样一个线性函数后，就得到

$$m(u;a,b)=S(u)-\frac{(b-u)S(a)+(u-a)S(b)}{b-a} \quad (43)$$
$$(a\leqslant u\leqslant b).$$

从几何上来看，$m(u;a,b)$ 表示为特征 $S(u)$ 与它的弦 AB 图象之间的竖直距离(图 44[1])．对所有 $u<b$ (包含点 $u=0$ 在内)，函数 $m(u;b)$ 满足(31)式，因此在扩充区间 $0\leqslant u\leqslant b$ 上它与 $S(u)$的差为一常数．因为 $m(b;b)=0$，所以

$$m(u;b)=S(u)-S(b) \quad (u\leqslant b) \quad (44)$$

(图 45)．

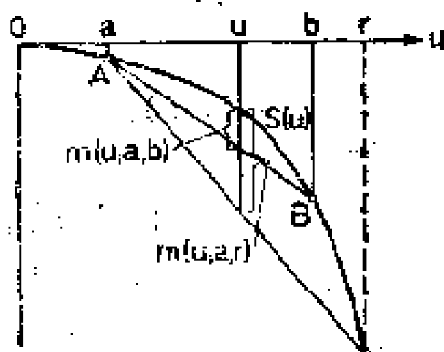


图 44

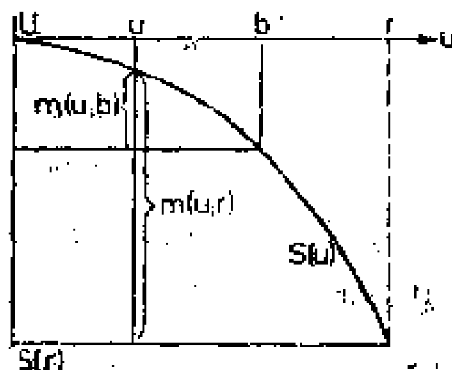


图 45

如果区间 I 含有无穷多个状态(即它的右端点为极限点 r)，那么前面的论证就不适用了，这是因为我们并不知道平均离开时间 $m(u)$ 是否有限．这时，需要在(43)与(44)式中令 $b\uparrow r$ 而取极限．下面我们来说明，通过取这个极限，离开整个状态空间的平均时间 $m(u;r)=M_uT$，的确可由(44)式得到(在(43)式中能取极限，这可类似验证)．设 τ_b 是质点首次到达点 b 的时间．对 $u\leqslant b$，有 $m(u;b)=M_u\tau_b$．量 τ_b 随 b 单调递增，因此在均值符号内可以取极限[2]，于是得到

1) 在图 44 与 45 中，没有把特征描绘成折线，而是描绘成一平滑曲线．这是因为就我们的目的而言，整个图象的全貌要比折线段详图更重要．

2) 见第100页的注．

$$\lim_{b\uparrow r} M_u\tau_b = M_u\{\lim_{b\uparrow r} \tau_b\}.$$

根据(25)式，对所有 $b > u$，概率为 1 地有 $\tau_b < T$. 由于到时刻 $\lim_{b\uparrow r} \tau_b$ 时，质点必须作无穷多次跳跃，所以有 $\lim_{b\uparrow r} \tau_b \geq T$. 从而概率为 1 地有 $\lim_{b\uparrow r} \tau_b = T$. 因此，

$$\lim_{b\uparrow r} m(u;\ b) = m(u;\ r),$$

且得到

$$m(u;\ r) = S(u) - S(r). \tag{45}$$

在(43)式中取极限，可以发现，当 $r < \infty$(点 r 吸引质点)时，从 u 出发到达 a 或直到累积跳跃时间 T 的平均时间等于

$$m(u;\ a,\ r) = S(u) - \frac{(r-u)S(a) + (u-a)S(r)}{r-a}. \tag{46}$$

当 $r = \infty$ (边界排斥质点)时，需要用 l'Hôpital (罗比达)法则来计算 $m(u;\ a,\ r)$.

为了方便，把在特征 S 表达式中的数 μ_n 看作为集中在点 u_n 上的一个测度(质量). 这个测度刻划了质点移动的速度，因此称为速度测度. 平均来说，质点在点 u_n 逗留一段时间 $1/a_n$，然后质点位于点 u_n 的附近，二者的距离以概率 q_n 为 δ_{n-1}，以概率 p_n 为 δ_n，因此，平均来说，在 $1/a_n$ 一段时间内，质点占据了长为 $q_n\delta_{n-1} + p_n\delta_n$ 的一段轨迹. 用平均时间除以平均占有轨道长，注意到(34)式，得到

$$a_n(q_n\delta_{n-1} + p_n\delta_n) = \frac{2a_n\delta_{n-1}\delta_n}{\delta_{n-1} + \delta_n} = \frac{1}{\mu_n}.$$

这表明，$\mu = \{\mu_0, \mu_1 \cdots, \mu_n, \cdots\}$ 越大，质点沿标准尺度移动越慢.

如果引进关于测度 μ 的导数 D_μ 的概念，那么(35)式可以有更简单的形式. 设函数 $v(u)$ 在每个区间 (u_n, u_{n+1}) 上为常数且在点 u_n 无界. 这个函数在点 u_n 关于测度 μ 的导

数定义为

$$D_\mu v(u_n) = \frac{v(u'') - v(u')}{\mu_n},$$

其中

$$u' \in (u_{n-1}, u_n), \quad u'' \in (u_n, u_{n+1}).$$

如用新的记号，(37) 式采取 $D_\mu v = 2$ 的形式，并且因为

$$v = -D_u S,$$

所以得到下面关于 S 的方程：

$$D_\mu D_u S(u_n) = -2.$$

读者容易验证，如果对 $u < 0$，令 $D_u S(u) = 0$ (即，把 0 左边 $S(u)$ 的图象看成是水平的)，那么这个方程不仅对 $n \geqslant 1$ 成立，而且对 $n = 0$ 也成立。

同样地，关于 $m(u)$ 的(31)式可以表示为

$$D_\mu D_u m(u_n) = -2 \quad (u_n \in I).$$

将这个方程与在 Wiener 过程中关于平均时间 $m(x)$ 的 Poisson 方程 $\Delta m = -2$ 进行比较，可以看出算子 $D_\mu D_u$ 与 Laplace 算子类似。

如 § 3 所述，标准尺度 $\{u_0 = 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots\}$ 的描述等价于转移概率 q_n 与 p_n 的描述。从定义 μ_n 的关系式中显然看出，参数 a_n 在已知 q_k 与 p_k 的前提下由 μ_k 唯一决定。因此，在生灭过程定义中，替代常数 q_n, p_n 和 a_n，可用标准尺度与速度测度来描述。任意递增序列 $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$ 可以用来作为标准尺度，而任意正数序列 μ_0, μ_1, $\cdots$, μ_n, $\cdots$ 可以取作为速度测度。

由于标准尺度中的那些数出现在图象 $S(u)$ 折线的尖点处，所以从已知的特征可以找到过程的标准尺度，然后确定常数 a_n，于是生灭过程也可由它的特征 $S(u)$ 完全确定。在半区间 $[0, r)$ 上，任意一个递减的上凸分段线性连续函数，

如果在 $u=0$ 处为零，且有可数个线段以及折线尖点有唯一的极限点 r，那么都可以作为特征。

§6. 可及边界 (accessible boundary) 和不可及边界 (inaccessible boundary)

我们来观察一下，生灭过程 $X(t)$ 的轨道是怎样依赖于变量 $S(r)$ 的有限性或无限性的.

如果 $S(r)>-\infty$，那么根据(45)式，对任意状态 u，M_uT 也有限. 因此，对所有 u，有

$$P_u\{T<\infty\}=1.$$

现在令 $S(r)=-\infty$，这时，可以证明，对所有 u，有

$$P_u\{T=\infty\}=1. \tag{47}$$

如若不然，假定对某个 u，有

$$P_u\{T<\infty\}>0, \tag{48}$$

因为从状态 $u_0=0$ 出发可以在有限时间内到达 u，所以

$$P_0\{T<\infty\}>0.$$

因此，存在一个 $t<\infty$，使得

$$\alpha=P_0\{T<t\}>0.$$

既然从 0 出发到达任一状态 u 的概率等于 1，所以

$$T=\tau+T'$$

P_0 概率为 1 地成立，其中 τ 是从 0 出发到达 u 的时间，T' 是从到达 u 开始算起进行了无穷次跳跃的累积时间. 根据强马尔可夫性，在给定 $X(0)=u$ 的条件下，T' 与 τ 独立且 T' 与 T 同分布. 因此，如果用 $F(s)$ 表示随机变量 τ 的分布函数，就有

$$\begin{aligned}\alpha&=P_0\{T<t\}\\&=\int_0^t P_u\{T<t-s\}dF(s)\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^t P_u\{T < t\} dF(s)$$
$$\leqslant P_u\{T < t\}. \tag{49}$$

根据§5开始时所做的说明，估计式(49)告诉我们 $M_u T < \infty$（对所有 u 成立）。另一方面，由假设 $S(r) = -\infty$ 和(45)式可知，$M_u T = \infty$。因而(48)式与条件 $S(r) = -\infty$ 相矛盾，这就证明了(47)式。

我们发现，所研究的过程依据 $S(r)$ 是有限还是无限分成两类。其中一类对任意初始状态 u，累积跳跃时间 T 概率为1地有限；另一类对任意 u，T 概率为1地无穷。在前一种类型中，我们说边界 r 是**可及的**；在后一种类型中称 r 为**不可及的**。

把上述分类与分成吸引边界和排斥边界（见§4）并列起来进行讨论。条件 $r = \infty$，意味着 $S(r) = -\infty$，从而**排斥边界是不可及的**。因此，实际上只有三种不同类型的边界：

I. 可及边界（$r < \infty, S(r) > -\infty$)）。时间 T 概率为1地有限，且 $\lim\limits_{t \uparrow T} X(t) = r$。

II. 吸引但不可及边界（$r < \infty$，$S(r) = -\infty$）。概率为1地有 $T = \infty$，且 $\lim\limits_{t \uparrow T} X(t) = r$。

III. 排斥边界（$r = \infty$，$S(r) = -\infty$）。概率为1地有 $T = \infty$，且当 $t \uparrow T$ 时，质点无穷多次跑遍所有状态。

从分析上说，边界的可及条件含于由双重级数

$$-S(r) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m < \infty} \frac{1}{a_k} \frac{q_{k+1} \cdots q_m}{p_k \cdots p_m}$$

的收敛性中。（这个级数可在 S_n 的表示式(42)中令 $n \to \infty$ 导出。）例如，令 $p_n = p$，$q_n = q$ 与 n 无关（$n \geqslant 1$）。如§3所述，当 $p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$r = \infty$，而当 $p > \frac{1}{2}$ 时，$r = p/(p -$

q). 因此，如果 $p \leqslant 1/2$，我们有排斥边界；如果 $p > 1/2$，有吸引边界． 现在设 $p > \frac{1}{2}$，我们来确定 a_n 取何值时边界 r 是可及的．在这种情况下，因为对固定的 k，有

$$\sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{a_k} \frac{q_{k+1} \cdots q_m}{p_k \cdots p_m} = \frac{1}{a_k p} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^l$$

$$= \frac{1}{a_k(p-q)},$$

所以

$$S(r) = \frac{-1}{p-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

因此，边界是可及的充要条件是级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 收敛． 容易验证，在退化的情形，即 $q=0$，$p=1$ 时，这条件也成立[1]．

§7. 生灭过程的延续，问题的提法

为了研究生灭过程在第一个累积跳跃时间 T 之后的延续，我们先来作些准备． 显然，当边界 r 是不可及时(这时 $T=\infty$ 的概率为 1)，这问题无意义．因此，自然可假定 r 和 $S(r)$ 是有限的．于是

$$P_x\{T < \infty,\ \lim_{t \uparrow T} X(t) = r\} = 1, \tag{50}$$

也就是说，在时间 $T<\infty$ 时，过程几乎所有的轨道都到达点 r．我们可以略去例外的零概率事件，假定这性质对过程所有轨道成立．

将点 r 并入状态空间，于是状态空间 E 由一系列孤立点

1) 在 Feller 的书[1]中详细地分析了这个例子．

$0=u_0<u_1<\cdots<u_n<\cdots$ 以及它们的极限点 r 组成. 函数 $f(u)$ $(u\in E)$ 连续,当且仅当 $f(u_n)\to f(r)$.

假定存在生灭过程的某种延续,这是指:

1) 原先对 $t\in[0,T)$ 所定义的轨道 $X(t)$ 延续到某个区间 $[0,\zeta)$ 上[1] $(T\leqslant\zeta\leqslant\infty)$. 这里 $X(t)$ 的值可以是点 u_n, 也可以是点 r.

2) 可以把概率分布 P_u 扩展到一个更广的事件类上,而这些事件由延续过程的整个状况所确定. 对于在时刻 T 以前用轨道所定义的这些事件,其概率分布仍不变. 再者,相对于初始点 r, 引进一个辅助分布 P_r.

3) 延续过程是强马尔可夫过程,即对任意马尔可夫时间 $\tau<\zeta$, 在 $X(\tau)=u(u\in E)$ 的条件下,过程 $Y(t)\equiv X(\tau+t)$ 与时刻 τ 以前 $X(t)$ 的状况无关且与在初始时刻 0 位于点 u 的过程 $X(t)$ 有相同的概率分布.

用下面补充的假设再把问题稍加限制:

4) 延续过程的轨道保持右连续, 即当 $h\downarrow 0$ 时, $X(t+h)\to X(t)$. (这表明在时刻 t 处于状态 $u\neq r$ 的质点在点 u 处停留大于 0 的一段时间;当质点处于点 r 时,在很短一段时间内不能跑得离 r 太远.)

5) $X(T)=r$ (根据(50)式这完全是合理的).

注意,假定 5) 和条件 $T<\infty$ 把概率

$$q(u;a,r)=\frac{r-u}{r-a},$$

$$p(u;a,r)=\frac{u-a}{r-a}\tag{51}$$

(在 §3 最后可以找到它们) 分别变成轨道从 u 出发在到达 r

---

1) 时间 ζ 表示轨道终止(即一个作随机徘徊的质量消失)的时刻. 如果过程不终止,那么 $\zeta=\infty$.

之前到达点 a 的概率与在到达 a 之前到达点 r 的概率.

有时把在时刻 T 之后延续同时遵守条件 1) — 5) 的过程称为 A 类过程. 可以证明 A 类过程由它的特征算子 $\mathfrak{A}$ 唯一确定(在 § 11 根据马尔可夫过程的一般理论给出了这个断言的证明). 可以看出,在除了 r 之外的所有状态上,算子 $\mathfrak{A}$ 完全被时间 T 之前过程的状况所决定. 因此,过程 $X(t)$ 的各种延续性唯一地由在边界点上的特征算子的形式(边界条件)所描述.

如上所述,特征算子 $\mathfrak{A}$ 由方程

$$\mathfrak{A}f(u)=\lim_{U\downarrow u}\frac{M_uf(X(\tau))-f(u)}{M_u\tau}\quad(u\in E)\tag{52}$$

所确定,其中 U 是包含状态 u 的不断缩小的邻域,而 τ 是轨道从 U 首次离开的时间. 这里,如果对所有 $t<\zeta$, $X(t)\in U$, 那么令 τ 等于 ζ, 且在计算 $M_u\tau$ 时要包含这个值;另一方面,在计算 $M_uf(X(\tau))$ 时,对 $\tau=\zeta$ 的轨道不予考虑,因为 $X(\zeta)$ 是没有意义的. 在 $M_u\tau=\infty$ 时,(52)式中的整个分式为零. 我们假定算子 $\mathfrak{A}$ 对 E 上所有如下的有界函数 $f(u)$ 有意义: 对任意 $u\in E$, (52)式右边的极限存在且有限[1].

任给 u_n, 可以把邻域 U 缩小到只含 u_n 而不再含其他状态. 这时 τ 是首次离开 u_n 的时间, 它的均值等于 $1/a_n$, 而 $X(\tau)$ 以概率 q_n 取点 u_{n-1}, 以概率 p_n 取点 u_{n+1}. 于是(52)式中的分式变成

$$\frac{q_nf(u_{n-1})+p_nf(u_{n+1})-f(u_n)}{\dfrac{1}{a_n}},\tag{53}$$

当进一步缩小邻域 U 时, 这个值不变. 因此,(53)式就是 $\mathfrak{A}f(u_n)$. 借助于 § 3 和 § 5 所引进的导数 D_u 与 D_μ, 可以把

1) 见第71页注.

$\mathfrak{A}f(u_n)$ 的表达式写成一个很漂亮的形式，由于

$$q_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}+\delta_n},$$

$$p_n = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-1}+\delta_n} \quad (n \geqslant 1),$$

直接计算几步后，从(53)式可得到

$$\mathfrak{A}f(u_n) = \frac{\dfrac{f(u_{n+1})-f(u_n)}{\delta_n} - \dfrac{f(u_n)-f(u_{n-1})}{\delta_{n-1}}}{\dfrac{1}{a_n}\dfrac{\delta_{n-1}+\delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}}$$

$$= \frac{D_uf(u'')-D_uf(u')}{\dfrac{1}{a_n}\dfrac{\delta_{n-1}+\delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}},$$

其中

$$u' \in (u_{n-1}, u_n), \quad u'' \in (u_n, u_{n+1}).$$

又分母等于 $2\mu_n$（见(38)式），最后得到

$$\mathfrak{A}f(u_n) = \frac{1}{2} D_\mu D_u f(u_n). \tag{54}$$

如果对 $u<0$，令 $D_uf(u)=0$，即把函数 f 在零的左边看作常数，那么(54)式对 $n=0$ 同样地成立。

现在我们能够来说明 Laplace 算子 Δ 与算子 $D_\mu D_u$ 之间的类似性，在 § 5 中确定平均离开时间 $m(u)$ 时，我们曾指出过这一点。事实上，Wiener 过程中的方程 $\Delta m=-2$ 与生灭过程中方程 $D_\mu D_u m=-2$ 可以统一成

$$\mathfrak{A}m=-1 \tag{55}$$

的形式。

关于过程 $X(t)$，在很一般的假定下，(55)式都成立。例如，令 $m(x)=M_x\tau$，其中 τ 是轨道从某一集 I 首次离开的时间。假定对所有的 y，$m(y)<\infty$ 并且 x 是集 I 的一个内

点．考虑 I 中 X 的一邻域 U 记

$$\tau = \tau_U + \tau', \tag{56}$$

其中 τ_U 是首次离开 U 的时间，τ' 是从首次离开 U 到首次离开 I 的时间．如果过程具有强马尔可夫性，那么在 $X(\tau_U)=y$ 的条件下，τ' 的条件均值等于 $m(y) = m(X(\tau_U))$[1]．因此 $M_x\tau' = M_x m(X(\tau_U))$，由(56)式得到

$$m(x) = M_x\tau_U + M_x m(X(\tau_U)).$$

因此，由特征算子的定义，有

$$\mathfrak{A}m(x) = \lim_{U\downarrow x}\frac{M_x m(X(\tau_U)) - m(x)}{M_x\tau_U}$$

$$= \lim_{U\downarrow x}(-1) = -1.$$

注意到，对应于直线上的任意扩散过程的算子

$$L = a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} \tag{57}$$

也可简化成 $1/2D_\mu D_u$ 的形式(回想我们引进生灭过程时是作为扩散过程的离散类似)．用 $D_u f$ 表示函数 $f(x)$ 关于增函数 $u(x)$ 的导数，即

$$D_u f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{u(x+h) - u(x)}.$$

再用 $D_\mu f$ 表示函数 $f(x)$ 关于函数 $v(x)$ 的导数，这里函数 $v(x)$ 由关系式

$$v(x) = \int_0^x \mu(y)dy,\quad \mu(y) > 0$$

所确定．假定函数 u 和 f 是二次可微且密度 μ 是连续的，于是

$$D_u f(x) = \frac{f'(x)}{u'(x)},$$

---

1) 见第120页注．

$$D_\mu f(x) = \frac{f'(x)}{\mu(x)}.$$

因此，

$$\frac{1}{2} D_\mu D_u f = \frac{u'f'' - u''f'}{2\mu u'^2}.$$

为了满足方程

$$af'' + bf' = \frac{1}{2} D_\mu D_u f,$$

只需令

$$u(x) = \int_0^x e^{-\int_0^y \frac{b(x)}{a(x)} dx} dy,$$

$$\mu(x) = \frac{1}{2a(x)} e^{\int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy}.$$

如果函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 不可微，那么算子 $1/2D_\mu D_u$ 不能写成(57)式的形式．但是，即使在这种情况下，相同的算子仍对应于一个具有连续轨道的马尔可夫过程(只要求 u 和 v 确实是增的而 u 又是连续的)．

在连续情形中，利用函数 $u(x)$ 与

$$S(x) = -\int_0^x v(y) du(y)$$

表示离开区间的概率以及离开的平均时间，其表示式与生灭过程情形一样．

现在我们来研究在边界点 r 处特征算子的形式．在§8—§10将对各种可能情形给出一个完整的分析．这里仅作初步的考虑．

点 r 的邻域 U 可以方便地用不含在 U 内的最右边的状态 u_n 来表示．用 y 表示这个状态；用 U_y 表示点 r 这一邻域；用 τ_y 表示首次离开 U_y 的时间；再令

$$\pi_y(u) = P_r\{X(\tau_y) = u\},\ m(y) = M_r\tau_y, \tag{58}$$

于是特征算子在点 r 的方程呈

$$\mathfrak{A}f(r)=\lim_{y\uparrow r}\frac{\sum\limits_{0\leqslant u\leqslant y} f(u)\pi_y(u)-f(r)}{m(y)} \tag{59}$$

形式. 因此,如果我们能求出所有分布

$$\pi_y=\{\pi_y(u_0),\ \pi_y(u_1),\ \cdots,\ \pi_y(u_n)\}$$

和适合于 1)—5) 的延续过程的所有平均时间 $m(y)$, 那么,找出算子 $\mathfrak{A}$ 在点 r 处所有可能的形式, 从而找出使我们感兴趣的所有过程,这一问题,就可以解决.

一个比较特殊的情况是,当边界 r 是吸收的,即当质点到达 r 就再不离开 r, 这时, $m(y)=+\infty$, $\pi_y(u)=0$, 根据(59)式,有

$$\mathfrak{A}f(r)=0. \tag{60}$$

我们来证明: 如果边界 r 不是吸收的,那么对所有 y, 有

$$P_r\{\tau_y<\infty\}=1$$

且

$$M_r\tau_y<\infty.$$

显然,只需考虑时刻 τ_0, 这是因为对所有 y, $\tau_y\leqslant\tau_0$. 我们仍用在 §5 开始时所做的说明. 由(45)式知, 从 u 出发到达 r 的平均时间等于

$$\begin{aligned}m(u;r)&=S(u)-S(r)=|S(r)|-|S(u)|\\&\leqslant|S(r)|\end{aligned}$$

(回忆 $S(u)\leqslant 0$). 再根据 Chebyshev (切比雪夫)不等式, 得到

$$P_u\{T>t\}\leqslant\frac{|S(r)|}{t},$$

因而存在 $t_0<\infty$, 使得

$$P_u\{T<t_0\}>\frac{1}{2} \tag{61}$$

对所有的 u 同时成立. 如果边界 r 不是吸收的，那么质点离开 r 的概率大于零，因而离开点 r 某个邻域 U_y 的概率也大于零. 在质点离开 U_y 的时刻. 它或者处于某个状态 $u \leqslant y$，或者它消失. 在前一种情形，质点从 y 到 0 的概率大于零，因而可以离开 U_0，而在后一种情形，质点同时离开 U_y 和 U_0. 因此，如果边界 r 不吸收质点，那么质点离开 U_0 的概率将大于零，从而有某一 $t_1 < \infty$，使得

$$P_r\{\tau_0 < t_1\} = \alpha > 0. \tag{62}$$

由(61)和(62)式可知，一旦质点位于 U_0 内部，那么在 t_0 这段时间内到达 r 且在到达 r 之后经过 t_1 这段时间离开 U_0 的概率大于 $\alpha/2$. 但这时，质点从点 u 开始运动，它继续经过 t_0+t_1 这段时间离开 U_0，于是对所有 $u \in U_0$，有

$$P_u\{\tau_0 < t_0 + t_1\} > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

这个估计式表明，我们的断言是对的.

§8. 跳跃测度与反射系数

我们首先关心的是分布 π_y，它是点 $X(\tau_y)$ 的分布，其中 τ_y 是轨道首次离开 U_y 的时间.

由定义，在时刻 τ_y 质点或者位于状态 $u_0 = 0, u_1, \cdots, y$ 之一，或者它从状态空间 E 消失(如果在终止时刻 ζ 以前，质点一直位于点 y 的右边就出现后一种情况). 为了避免重复以及简化公式，我们说在轨道终止时刻 ζ 质点并没有消失，而是到达了一个虚构的状态 -1，由这里质点再不能离开. 为此，令

$$\pi_y(-1) = P_r\{\tau_y = \zeta\},$$

并把概率 $\pi_y(-1)$ 包含在概率 π_y 的集合之中.

假定质点在点 r 停留了一段时间[1]，然后在时刻 ξ 从这点以分布

$$\pi=\{\pi(-1),\ \pi(0),\cdots,\ \pi(u),\cdots\}$$

跳跃，其中

$$\sum_u \pi(u)=1. \tag{63}$$

我们来证明，所有分布 π_y 都可用 π 唯一地表示.

如果 $X(\xi)=u\leqslant y$, 那么 $\tau_y=\xi$, $X(\tau_y)=u$（图 46）.

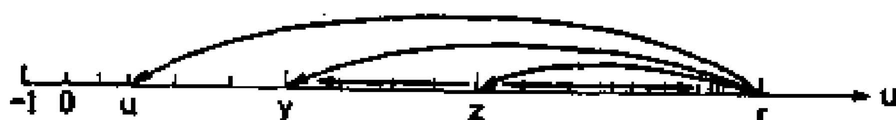


图 46

如果 $X(\xi)=z>y$, 那么质点从点 z 或者先到 y 或者先到 r. 在前一种情形，$X(\tau_y)=y$; 而在后一种情形，由强马尔可夫性，过程将再一次重新开始. 已知从 z 到 y 或到 r 的概率，分别等于 $(r-z)/(r-y)$ 和 $(z-y)/(r-y)$（见(51)式）. 由此得到

$$\pi_y(u)=\pi(u)+\sum_{y<z<r}\pi(z)\frac{z-y}{r-y}\pi_y(u)\quad (u<y), \tag{64}$$

$$\pi_y(y)=\pi(y)+\sum_{y<z<r}\pi(z)\cdot\left[\frac{z-y}{r-y}\pi_y(y)+\frac{r-z}{r-y}\right]. \tag{65}$$

再由(64)与(65)式求出

$$\pi_y(u)=\frac{\pi(u)}{1-\dfrac{1}{r-y}\displaystyle\sum_{y<z<r}(z-y)\pi(z)}\quad (u<y), \tag{66}$$

1）如同 §2（第143—145页）所表明，这段时间服从指数分布.

$$\pi_y(y) = \frac{\pi(y) + \alpha(y)}{1 - \frac{1}{r - y} \sum_{y<z<r} (z - y)\pi(z)}, \tag{67}$$

其中

$$\alpha(y) = \frac{1}{r - y} \sum_{y<z<r} (r - z)\pi(z). \tag{68}$$

如果从(66)和(67)式中的分母减去$\alpha(y)$，那么借助(63)式，可得到

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{r - y} \sum_{y<z<r} (r - y)\pi(z) \\ = 1 - \sum_{y<z<r} \pi(z) \\ = \sum_{u \leqslant y} \pi(u). \end{aligned}$$

因此，π_y 的表达式可以写成更简洁的形式

$$\pi_y(u) = \frac{\pi(u)}{\sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha(y)} \quad (u < y), \tag{69}$$

$$\pi_y(y) = \frac{\pi(y) + \alpha(y)}{\sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha(y)}. \tag{70}$$

为了说明上面导出的关系式的意义，考虑下面的事件 C：{质点从 r 出发在没有离开 U_y 之前不再回到点 r}. (69) 和 (70)式的分母包含概率 $P_r(C)$，且这些式子表明点 $X(\tau_y)$ 的无条件分布与在条件 C 下的条件分布相同.

选择不同的分布 π 就得到不同的延续过程 $X(t)$. 然而这还没有竭尽所有可能.事实上，质点从状态 r 出发的第一次跳跃就可能不存在；另一种可能情形是在任意短的时间 t 内，质点跳跃无穷多次，每次都返回原来状态(当然，对每一个 $\varepsilon > 0$，只可能存在有限次超过 ε 的跳跃)，先前的论证肯定

不适用于这种情形．不过，(69)和(70)式在一般情形下仍有效，但 π 不再是概率测度(级数(63)发散)，并且对 π 给出的明显解释变得更加复杂了．此外，(68)式将含有附加项 α，它刻划了反射的特征．

注意到，如果用同一正常数乘所有数 $\pi(u)$，那么(68)，(69)和(70)式对分布 π_y 仍得到同样的值．因此，可以说，除掉一个正因子外，π 是唯一确定的．

现在我们来确定一般情况是怎样的．**对任意 A 类过程，存在一个非负常数 α(反射系数)和一个非负序列 $\pi=\{\pi(-1),\ \pi(0),\ \cdots,\ \pi(u),\ \cdots\}$ (跳跃测度)，(可相差一个正因子)，使得**

1)
$$\sum_u (r-u)\pi(u)<\infty; \tag{71}$$

2) **如果数 $\alpha,\ \pi(u)(u=-1,\ 0,\ u_1,\cdots)$ 中至少有一个不为零，那么对每一个 $y\geqslant 0$，π_y 可由(69)和(70)以及**

$$\alpha(y)=\frac{1}{r-y}\left[\alpha+\sum_{y<z<r}(r-z)\pi(z)\right] \tag{72}$$

用 α 和 π 表示出来；

3) **如果所有数 $\alpha,\ \pi(u)$ 都等于零，那么所有数 $\pi_y(u)$ $(u\leqslant y)$ 也都等于零．**

在边界 r 为吸收的情形下，只需令 $\alpha=0,\ \pi=0$．这时由(69)，(70)和(72)式明显地看出 α 和 π 不可能再有其他的取法．剩下的情形如前节最后所表明，对区间 $[0,r)$ 中的任意状态 y，都有

$$\pi_y(-1)+\pi_y(0)+\cdots+\pi_y(y)=1. \tag{73}$$

假定(73)式成立，考查点 r 的两个邻域 U_x 和 $U_y(x>y)$．这时 $\tau_y\geqslant\tau_x$，并且当 $X(\tau_x)\leqslant y$ 时，$X(\tau_y)=X(\tau_x)$．另一方面当 $X(\tau_x)=z>y$ 时，从 z 出发可能先到 y (这时时

刻 τ_y 出现)或者先到 r。当返回到 r 之后，随机变量 $X(\tau_y)$ 重新具有分布 π_y。因此，对 $\pi_y(u)(u\leqslant y)$，我们得到的方程完全类似于(64)和(65)式，只不过在这些方程中用 $\pi_x(u)$ 和 $\pi_x(z)$ 替代 $\pi(u)$ 和 $\pi(z)$，并且求和是对区间 $y\leqslant z\leqslant x$ 中的所有的状态 z 进行的。如同把(64)和(65)式简化成(69)和(70)式一样，重复同样的运算，便得到

$$\pi_y(u)=\frac{\pi_x(u)}{\sum_{u\leqslant y}\pi_x(u)+\alpha_x(y)}\quad(u<y),\tag{74}$$

$$\pi_y(y)=\frac{\pi_x(y)+\alpha_x(y)}{\sum_{u\leqslant y}\pi_x(u)+\alpha_x(y)},\tag{75}$$

其中

$$\alpha_x(y)=\frac{1}{r-y}\sum_{y\leqslant z\leqslant x}(r-z)\pi_x(z)\tag{76}$$

(为了简化分母，用(73)式代替(63)式)。

由(74)式可知，对任意两个确定的状态 $y<x$，两个有限非负数集

$$\pi_y(u)\quad(u<y)\tag{77a}$$

和

$$\pi_x(u)\quad(u<y)\tag{77b}$$

只相差一个正因子。因此，存在一个非负无穷数列

$$\pi=\{\pi(-1),\pi(0),\cdots,\pi(u),\cdots\}\tag{78}$$

使得 (77a, b) 中的每一个集都可由 π 中相应的一段乘以一个正常数得到。

如果集 (77a, b) 全部由零所组成，那么只需取 $\pi=0$。然而，如果有某两个状态 $v<w$，使得 $\pi_w(v)>0$，那么只需考虑 $\pi_x(u)/\pi_x(v)$，其中 $x>u$，$x>v$，并注意到，这个比值不依赖于 x (只要分母 π_x 对 $x=w$ 有一非零值，那么对任

意 $x > v$ 这分母也有非零值).

在对所有 u, $\pi(u) = 0$ 的特殊情况下,对任意 $u < y$, 有 $\pi_y(u) = 0$, 因此对所有 $y \geqslant 0$, 有 $\pi_y(y) = 1$. 所以当假定 $\alpha > 0$ 时, (69)—(70)成立.

现在假定测度 π 有一非零值, v 是从左边起第一个使得 $\pi(v) > 0$ 的状态. 令 $x > y > v$, 用因子 $\lambda(x)$ 乘(74)和(75)式中的分子与分母(其中 $\lambda(x)$ 就是集 $\pi_x(u)$ 与序列(78)中相应那段所差的因子),得到

$$\pi_y(u) = \frac{\pi(u)}{\sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha_x(y)\lambda(x)} \quad (u < y), \tag{79}$$

$$\pi_y(y) = \frac{\pi(y) + \alpha_x(y)\lambda(x)}{\sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha_x(y)\lambda(x)}. \tag{80}$$

由假设, $\pi(v) \neq 0$, 因而由(79)式知, 当 $u = v$ 时, 乘积 $\alpha_x(y)\lambda(x)$ 是唯一确定的. 因此, $\alpha_x(y)\lambda(x)$ 不依赖于 x,可以令

$$\alpha_x(y)\lambda(x) = \alpha(y)(x > y).$$

于是(79)和(80)式呈现出所需求的形式(69)和(70). 由这些式子显而易见,集 $\pi(u)$ $(u < y)$ 是由集 $\pi_y(u)$ $(u < y)$ 乘以 $\sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha(y)$ 而得到的. 因而

$$\lambda(y) = \sum_{u \leqslant y} \pi(u) + \alpha(y), \tag{81}$$

并且(69)和(70)式可以改写成

$$\pi_y(u) = \frac{\pi(u)}{\lambda(y)} \quad (u < y),$$

$$\pi_y(y) = \frac{\pi(y) + \alpha(y)}{\lambda(y)}$$

的形式. 在这些表达式中,令 $y = x$, 代入(76)式并用 $\lambda(x)$

乘两边，就得到

$$\alpha(y) = \frac{1}{r-y}\left[\alpha(x)(r-x) + \sum_{y<z\leqslant x} \pi(z)(r-z)\right]. \qquad (82)$$

当 x 增加时，式中 $\pi(z)(r-z)$ 项的和不减，这是因为新加上去的都是非负项．另一方面，这个和有上界 $\alpha(y)(r-y)$，因此，级数

$$\sum_z \pi(z)(r-z)$$

(也就是级数(71))收敛，并且由(82)式可知，当 $x\uparrow r$ 时，乘积 $\alpha(x)(r-x)$ 具有有限极限 α.

显然，这个极限是非负的．它也就是反射系数．在(82)式中，令 $x\uparrow r$，取极限便得到(72)式．

于是对 $y>v$ (v 是使得测度 π 大于零的最左状态)，分布 π_y 可以用参数 α 和 π 写成我们所需要的形式．对于区间 $0\leqslant y\leqslant v$ 中的状态 y (只要这样的状态存在)(69)，(70)和(72)式也成立．事实上，对于这些 y，分布 π_y 集中在单点 y 上．容易看出(69)，(70)和(72)式化为完全相同的分布．(当 $y\leqslant v$ 时，(69)和(70)式中的分母包含了带有一个正系数的项 $\pi(v)$，因此它不等于零．)因而，在各种情况下都证实了，可以用 α 和 π 通过(69)—(72)来表示分布 π_y．用同一个正因子乘 α 和 $\pi(u)$ 不会破坏这些特征数对分布的关系．反之，(69)，(70)和(72)式表明，如果分布 π_y 是由两组不同数对 $\alpha^{(1)}$，$\pi^{(1)}$ 与 $\alpha^{(2)}$，$\pi^{(2)}$ 根据这些式子所得到的，那么 $\alpha^{(1)}$，$\pi^{(1)}$ 与 $\alpha^{(2)}$，$\pi^{(2)}$ 成比例．因此，除掉一个正因子，跳跃测度 π 与反射系数 α 是唯一确定的．

在这节的最后，我们来讨论在各种情况下轨道 $X(t)$ 的

性质．如果 $\alpha=0$ 并且级数 $\sum\pi(u)$ 收敛，那么，把测度 π 正则化，可以假定 $\sum\pi(u)=1$。于是我们得到在这节开始时所分析的情形，这时 π 是质点从 r 首次跳跃时它的分布。

如果 $\alpha>0$，$\pi=0$，那么质点从 r 处不可能跳到其它状态，但质点又概率为 1 地离开 r，在这种情况下，质点在从 r 离开的时刻轨道不能不连续．对一个连续过程（例如 Wiener 过程）类似的结果出现在反射之中． 于是在离散的情况下仍说发生了反射是合理的．一个靠近 r 的质点在离开 r 任意一段实际距离之前又返回到 r 的概率接近于 1．因此，我们期望对于反射，质点将不是从点 r 一直离去，而是在到达一固定状态 $u<r$ 之前，无穷多次返回到 r 即围绕点 r"摆动"．这正是实际中所发生的事．

如果级数 $\sum\pi(u)$ 发散且 $\alpha=0$，那么质点在跳到一固定状态 u 之前将无穷多次跳到位于状态 u 和 r 之间的状态．这情景有一些类似于反射，但离开 r 时是跳跃方式而不是连续的。级数 $\sum\pi(u)$ 不能发散得太快．换句话说，在质点从 r 所能到达任一固定状态 $u<r$ 之前，它必须先跳到较近的状态，这将要占用无限长的时间（其中包含返回 r 的时间）．条件(71)正是为了避免这种可能性．对于某些生灭过程，它也是充分条件．在一般情况下，这个条件将由一个更强的条件所代替，这将在 §9 中说明．

如果 α 和 π 都不等于零，那么我们就得到从 r 跳跃和反射的组合情形． α 与 π 的比值刻划了质点在跳跃之中反射的"比重"，即如同(69)，(70)和(72)式所表明的那样，质点从 U_y 离开可以是跳跃到状态 $u(-1\leqslant u\leqslant y)$，跳跃到状态 $z(y<z<r)$，以及一个反射的结果，它们的概率分别与数 $\pi(u)$，$\pi(z)[(r-z)/(r-y)]$ 和 $\alpha/(r-y)$ 成正比（见习题）．

§9. 吸收系数和可透性 (inward passability)

跳跃测度 π 和反射系数 α 直接地确定质点从 r 出发跑向何处. 为了描述延续过程 $X(t)$, 还需要刻划出质点在 r 处逗留的时间. 例如,如果 $\alpha=0$, π 是一概率测度,那么质点从 r 处跳跃的分布为 π. 像在其余状态上的逗留时间那样,从开始到达 r 至首次离开 r 的这段时间也自然应该看成是服从指数分布. 这个指数分布的参数是任意的, 它表示了这个延续过程的一种新的特征, 应该把它同 π 和 α 一样对待. 在 $\alpha=0$, $\sum\pi(u)<\infty$ 的情况下,很难想像出任何其它可能情形,而实际上也不会再有其它可能情形. 在 $\alpha\neq0$ 或者

$$\sum\pi(u)=\infty$$

这种更一般的情况下, 情况大体上是相同的. 现在不考虑质点在有限时间内离开 r 无穷多次,这一情形,仍可用一个常数 β 来描述质点在 r 处逗留时间. 这个常数出现在刻画特征算子 $\mathfrak{A}$ 的关系式(59)中的分母 $m(y)=M_r\tau_y$ 之中,而且在计算 $m(y)$ 时,对测度 π 增加了一个新的限制, 并且可知反射并非对每一种边界都是可能的.

设 $X(t)$ 是 A 类过程,我们来证明,对任意 $y\geqslant0$, 有

$$m(y)=\Big\{\beta+\alpha v(r)+\sum_{y<z<r}\pi(z)[S(z)-S(r)]$$
$$-\alpha(y)[S(y)-S(r)]\Big\}\Big/\lambda(y), \qquad (83)$$

其中 β 是非负常数, 定义在具有跳跃测度 π 和反射系数 α 的位置上(精确到一个公共的正因子), 并且当 $\pi=0$, $\alpha=0$ 时,它不等于零; $S(u)$ 和 $v(u)$ 分别为生灭过程的特征以及它关于 u 的导数;

当 $\alpha = 0$, $v(r) = \infty$ 时,令

$$\alpha v(r) = 0,$$

$\alpha(y)$ 和 $\lambda(y)$ 是由(72)和(81)式所决定的变量,这里

$$\alpha v(r) < \infty \tag{84}$$

且

$$\sum_u \pi(u)[S(u) - S(r)] < \infty. \tag{85}$$

称常数 β 为吸收系数.

如果 r 是一个吸收边界,那么 $\alpha = 0$, $\pi = 0$, 且对任意 $\beta > 0$, (83)式给出关于 $m(y)$ 的精确值 $+\infty$.

对于其它情形,如 § 7 最后所示, $m(y) < \infty$. 假定这个条件满足,我们再来考察点 r 的两个邻域 U_x 和 $U_y (x > y)$. 在首次离开 U_x 的时刻 τ_x 时,质点具有分布 π_x. 如果

$$X(\tau_x) \leqslant y,$$

那么 $\tau_y = \tau_x$; 如果 $X(\tau_x) = z > y$, 那么 $\tau_y > \tau_x$, 在这

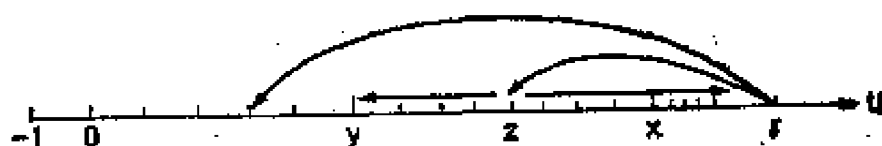


图 47

种情况下,质点从 z 出发或者先到达 y 或者先到达 r (图47). 对此所要求的平均时间是已知的:

$$m(z; y, r) = S(z) - \frac{(r-z)S(y) + (z-y)S(r)}{r-y}$$

$$= [S(z) - S(r)] - \frac{r-z}{r-y}[S(y) - S(r)] \tag{86}$$

(见 § 5 (46)式). 到达 y 和 r 的概率分别等于 $(r-z)/(r-y)$ 和 $(z-y)/(r-y)$. 如到达 y, 时间 τ_y 出现,如到达 r,

离开 U_y 还需要平均时间 $m(y)$。于是对函数 $m(y)$ 我们得到它的表示式

$$m(y)=m(x)+\sum_{y<z\leqslant x}\pi_x(z)\cdot\left[m(z;y,r)+\frac{z-y}{r-y}m(y)\right].\qquad(87)$$

用此式表示 $m(y)$ 且用(69)和(70)式所得到的值替代 $\pi_x(z)$ 我们就得到

$$m(y)=\left\{\lambda(x)m(x)+\sum_{y<z<x}\pi(z)m(z;y,r)+\alpha(x)m(x;y,r)\right\}\Big/\left\{\lambda(x)-\frac{1}{r-y}\cdot\left[\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)(z-y)+\alpha(x)(x-y)\right]\right\},\qquad(88)$$

其中

$$\lambda(x)=\sum_{u\leqslant x}\pi(u)+\alpha(x).$$

(88)式中的分母等于

$$\sum_{u\leqslant x}\pi(u)+\alpha(x)-\frac{1}{r-y}\cdot\left[\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)(z-y)+\alpha(x)(x-y)\right]$$

$$=\sum_{u\leqslant y}\pi(u)+\frac{1}{r-y}\cdot\left[\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)(r-z)+\alpha(x)(r-x)\right]$$

$$=\sum_{u\leqslant y}\pi(u)+\frac{1}{r-y}$$

$$\cdot\left[\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)(r-z)+\alpha\right.$$

$$\left.+\sum_{x<z<r}\pi(z)(r-z)\right]$$

$$=\sum_{u\leqslant y}\pi(u)+\alpha(y)=\lambda(y)$$

(两次用到(72)式，先对状态 x，然后对状态 y)．把(86)和(72)式所得到的 $m(z, y, r)$ 和 $\alpha(x)$ 的值代入(88)式中的分子，得到

$$\lambda(y)m(y)=\lambda(x)m(x)+\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)[S(z)-S(r)]$$

$$-\frac{S(y)-S(r)}{r-y}\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)(r-z)$$

$$+\alpha(x)[S(x)-S(r)]$$

$$-\frac{S(y)-S(r)}{r-y}\left[\alpha+\sum_{x<z<r}\pi(z)(r-z)\right].$$

根据(72)式上述和中的负项为 $-\alpha(y)[S(y)-S(r)]$． 因此，

$$\lambda(y)m(y)+\alpha(y)[S(y)-S(r)]$$

$$=\lambda(x)m(x)+\alpha(x)[S(x)-S(r)]$$

$$+\sum_{y<z\leqslant x}\pi(z)[S(z)-S(r)]. \qquad (89)$$

对(89)式令 $x\uparrow r$ 取极限，等式的左端与 x 无关，而等式右端所有项符号相同． 从而，当 $x\uparrow r$ 时，和 $\sum\pi(z)[S(z)-S(r)]$ 有界，因此级数(85)收敛．

其次，考查项 $\alpha(x)[S(x)-S(r)]$．根据(72)式，有

$$\alpha(x)[S(x)-S(r)]=\alpha\frac{S(x)-S(r)}{r-x}$$

$$+\frac{S(x)-S(r)}{r-x}\sum_{x<z<r}\pi(z)(r-z).$$

由函数 S 的上凸性可知，连接图象 S 上的横坐标为 z 和 r 的两点其弦的斜率，当 z 增加时，它的绝对值也增加（图 48）。因而，对 $x<z<r$，有

$$\frac{S(x)-S(r)}{r-x}<\frac{S(z)-S(r)}{r-z},$$

从而

$$0\leqslant\frac{S(x)-S(r)}{r-x}\sum_{x<z<r}\pi(z)(r-z)$$

$$\leqslant\sum_{x<z<r}\pi(z)[S(z)-S(r)].$$

右端是收敛级数(85)的余项，因此，

$$\lim_{x\uparrow r}\frac{S(x)-S(r)}{r-x}\sum_{x<z<r}\pi(z)(r-z)=0.$$

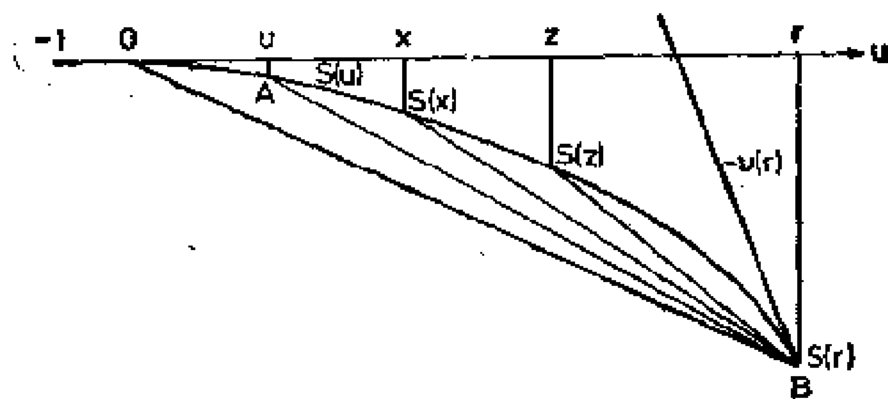


图 48

所以

$$\lim_{x\uparrow r}\alpha(x)[S(x)-S(r)]$$

$$=\alpha\lim_{x\uparrow r}\frac{S(x)-S(r)}{r-x}=\alpha v(r),\qquad(90)$$

其中当 $\alpha=0$ 且 $v(r)=\infty$ 时，这极限值为零.

由于 $S(u)$ 是折线而不是可微曲线，所以等式

$$\lim_{x\uparrow r}\frac{S(x)-S(r)}{r-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_r}{r-u_n}$$

$$= v(r) \tag{91}$$

一般说来是需要证明的. 由§5中的关系式可知,

$$S_n - S_m = \sum_{k=n}^{m-1} v_k \delta_k,$$

$$u_m - u_n = \sum_{k=n}^{m-1} \delta_k.$$

因为 v_k 随 k 增加而增加,所以得到

$$v_n(u_m - u_n) \leqslant S_n - S_m$$
$$\leqslant v_{m-1}(u_m - u_n) \leqslant v_{m-1}(r - u_n).$$

由此当 $m \to \infty$ 时,得到

$$v_n(r - u_n) \leqslant S_n - S(r) \leqslant v(r)(r - u_n)$$

或

$$v_n \leqslant \frac{S_n - S(r)}{r - u_n} \leqslant v(r).$$

又因为 $v(r) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, 于是证明了(91)式.

最后,由于(89)式的剩余项当 $x \uparrow r$ 时极限有限, 因此也存在一非负有限极限

$$\beta = \lim_{x\uparrow r} \lambda(x) m(x). \tag{92}$$

注意到(90)和(92)式, 对(89)式取极限就得到所要求的(83)式. 由(83)以及当 $\alpha > 0$ 时 $m(y)$ 的有限性得到条件(84). 由(83)式容易看出,给定不同时为零的 α 和 π, 系数 β 唯一确定,并且当 α 与 π 乘以一个正因子时, β 也乘以相同的因子(或者,如果原来它等于零,现在仍等于零). 当 $\alpha = 0$ 且 $\pi = 0$ 时,如前所述, β 为一任意正常数. 因此, 无论对哪种情况,系数 α 和 β 与测度 π 都是唯一确定的(精确到一个公共正因子).

现在我们需要找出吸收系数 β 与质点在边界点 r 逗留时

间之间的关系．假定边界 r 不是吸收的，注意到离开 U_y 的时间 τ_y 等于在点 r 逗留的时间 ξ_y 加上在区间 $y<z<r$ 中的那些状态 z 上的逗留时间 σ_y．因此，

$$m(y)=M_r\xi_y+M_r\sigma_y. \tag{93}$$

为了求出 $M_r\sigma_y$，考虑点 r 的一个邻域 $U_x(y<x<r)$．在时刻 τ_y 之前，质点可能离开 U_x 若干次，每一次离开 U_x 但仍在 U_y 内，质点逗留一段时间后或者返回 r 或者到达点 y．设 η_y^x 表示所有这些时间间隔的和．显然，$\sigma_y^x\leqslant\eta_y^x\leqslant\sigma_y$，其中 σ_y^x 是质点在时刻 τ_y 之前在 $y<z\leqslant x$ 之中的那些状态 z 上的逗留时间．因为 σ_y^x 随着 $x\uparrow r$ 递增收敛到 σ_y，所以 $M_r\sigma_y^x\uparrow M_r\sigma_y$，因而[1]

$$M_r\sigma_y=\lim_{x\uparrow r}M_r\eta_y^x. \tag{94}$$

容易计算 $M_r\eta_y^x$．事实上，像推导(87)式一样，可以得到

$$M_r\eta_y^x=\sum_{y<z\leqslant x}\pi_x(z)\cdot\left[m(z;y,r)+\frac{z-y}{r-y}M_r\eta_y^x\right]. \tag{95}$$

这个方程与关于 $m(y)$ 的方程(87)之间的差别仅在于(87)式右端的项 $m(x)$ 变成了0．因此，像对(87)一样，对(95)式重复同样的变换，我们就得到关于量 $\lim\limits_{x\uparrow r}M_r\eta_y^x=M_r\sigma_y$ 的关系式，此式与关于 $m(y)$ 的(83)式一样，只是少了 β 这一项．比较(83)与(93)式，得到

$$M_r\xi_y=\frac{\beta}{\lambda(y)}. \tag{96}$$

因此，在离开点 r 的一个给定邻域之前的平均逗留时间与 β 成正比．

当 $y\uparrow r$ 时，随机变量 ξ_y 递减收敛到质点在点 r 处连续

---

1) 见第100页的注．

逗留的时间 ξ. 由(72)和(81)式明显看出

$$\lim_{y\uparrow r}\lambda(y)=\begin{cases}\sum\limits_{u}\pi(u) & \text{当 } \alpha=0,\\ \infty & \text{当 } \alpha>0.\end{cases}\tag{97}$$

于是,如果 $\alpha=0$ 且级数 $\sum\pi(u)$ 收敛,那么

$$M_r\xi=\frac{\beta}{\sum\limits_{u}\pi(u)}>0.$$

在这种情况下,状态 r 与所有其它状态类似,在 r 上逗留时间服从参数为

$$\alpha_\infty=\frac{\sum\limits_{k}\pi(u)}{\beta}<\infty$$

的指数分布.

如果 $\alpha>0$ 或者级数 $\sum\pi(u)$ 发散,那么由(97)式可知, $M_r\xi=0$. 这时,满足 $X(t)=r$ 的时间 t 的集合 R 不能包含一个有正长度的区间. 不过,对于 $\beta>0$,质点在点 r 整个逗留时间大于零. 在这种情况下,集 R 的构造如同一个具有正测度的 Cantor 完备集(例如,见[25] § 15).

对于吸收边界,对所有 $y<r$,有 $\lambda(y)=0$,且(96)式也成立.

现在让我们较详细地研究条件(84)和(85). 由(84)式可知,只要 $v(r)<\infty$,反射系数 α 只能取非零值. 显然,在吸引边界 $(r<\infty)$ 的情形, $v(r)$ 的有限性或无限性决定着质点在有限时间内从 r 到任意其它状态 y 的可能性(见习题). 因此,我们说,当 $v(r)<\infty$ 时,吸引边界 r 是**可透的**,而当 $v(r)=\infty$ 时,它是**不可透的**,于是,**对反射来说边界必须是可透的**.

在前两节导出的跳跃测度 π 的条件

$$\sum_{u} \pi(u)(r-u) < \infty \tag{98}$$

和

$$\sum_{u} \pi(u)[S(u) - S(r)] < \infty \tag{99}$$

之间的关系依赖于边界的可透性. 由函数 S 的上凸性可知，对 $u < r$，有

$$\frac{S(u) - S(r)}{r-u} \geqslant \frac{|S(r)|}{r}$$

(见图 48，在那里弦 AB 的斜率比弦 OB 的斜率更陡). 因此，

$$r - u \leqslant \frac{r}{|S(r)|} |S(u) - S(r)|,$$

且由级数(99)的收敛性可知级数(98)收敛. 所以，不论在任何情况下，两个条件(98)和(99)中只有后一个条件有必要保留. 然而，如果边界 r 是可透的，那么，相反地，由(98)可推出(99)，因此这两个条件是等价的. 事实上，如果 $v(r) < \infty$，那么可以用几何上明显的估计式 $S(u) - S(r) \leqslant (r-u)v(r)$ (图 49).

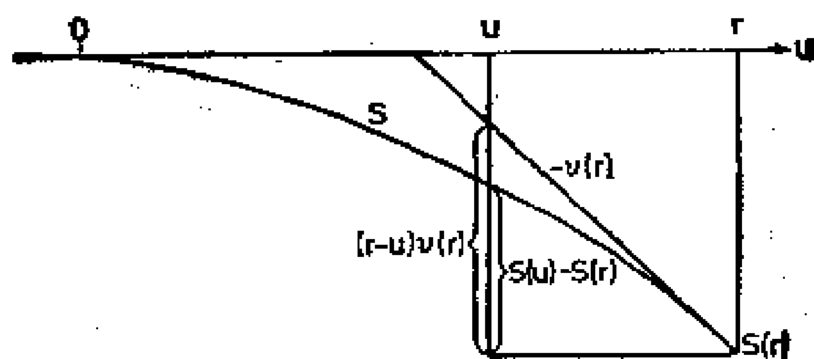


图 49

在可及边界的情形，r 与 $S(r)$ 都有限，于是可透性是一个较强的约束条件. 例如，如果 $p_n = p$，$q_n = q$，对一切

$n \geqslant 1$ 成立且 $p > q$，那么，根据(41)式，有

$$v(r) = \frac{1}{a_0} + p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \left(\frac{p}{q}\right)^n. \tag{100}$$

要使所得到的级数收敛，需要给参数 a_n 加上比使级数

$$-S(r) = \frac{1}{p-q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

收敛更强的要求（见§ 6）.

几何上显而易见(见图 49)，$r < \infty$ 和 $v(r) < \infty$ 的条件意味着 $S(r)$ 的有限性. 另一方面，仅有条件 $v(r) < \infty$ 对于边界的可及性是不够的；对于无限的 r 与 $S(r), v(r)$ 可能有限(例如，对 $p < q$，级数(100)可以收敛). 因此，一个可及的可透边界由条件

$$r < \infty, \quad v(r) < \infty$$

来刻划. （对于各种类型边界之间关系的更详细的论述见习题）.

§ 10. 边 界 条 件

现在我们给出一些结论. 在§ 8 和§ 9 我们曾表明，生灭过程的每一种延续(指的是 A 类过程)都对应着一个确定的跳跃测度 π，一个反射系数 α 和一个吸收系数 β（精确到一个公共正因子）. 知道了 α，β 和 π，对任意 $y \geqslant 0$，就能够从（69），（70），（72）和（83）式求出分布 π_y 和平均时间 $m(y)$. 因此特征算子在点 r 等于

$$\mathfrak{A}f(r) = \lim_{y \uparrow r} \frac{\sum_{0 \leqslant u \leqslant y} \pi_y(u) f(u) - f(r)}{m(y)} \tag{101}$$

(见(59)式). 在其余点上 $\mathfrak{A}$ 已知，根据(54)式，

$$\mathfrak{A}f(u_n)=\frac{1}{2}D_\mu D_u f(u_n)$$

$$(n=0,1,2,\cdots).\tag{102}$$

由于特征算子完全确定了 A 类过程，这表明生灭过程的延续由跳跃测度 π，系数 α 和 β 所唯一决定.

回想在构造跳跃测度 π 时，曾把质点到达一个虚构的状态 -1 代替质点的消失. 现在仍用原来的术语，为此对数 $\pi(-1)$ 引进下面专用记号：

$$\pi(-1)=\gamma\tag{103}$$

称 γ 为消失系数. 同以前一样,把其它的数 $\pi(u)$ $(u=u_0,u_1,\cdots)$ 看作为跳跃测度. 因此,现在我们有了三个系数 α, β 和 γ 以及跳跃测度 π.

我们不把量 α,β,γ 和 π 中的每一个分别标记，而把它们都写在一个式子里. 这个式子可由 (101) 式通过取极限而得到.

设边界 r 是不吸收的，把由 (69) 和 (70) 式所得到的数 $\pi_y(u)$ 代入到(101)式并且利用记号

$$\lambda(y)=\sum_{-1\leqslant u\leqslant y}\pi(u)+\alpha(y)$$

$$=\gamma+\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\pi(u)+\alpha(y)$$

(见(81)式)，得到

$$\mathfrak{A}f(r)=\lim_{y\uparrow r}\left\{\left(\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\pi(u)f(u)+\alpha(y)f(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\lambda(y)f(r)\right)\Big/\lambda(y)m(y)\right\}$$

$$=\lim_{y\uparrow r}\left\{\left(\sum_{0\leqslant u\leqslant y}\pi(u)[f(u)-f(r)]\right.\right.$$

$$+\alpha(y)[f(y)-f(r)]-\gamma f(r)\Big)\Big/$$

$$\lambda(y)m(y)\Big\}. \tag{104}$$

根据(92)，当 $y\uparrow r$ 时，后一式中的分母趋于系数 β. 如果函数 f 在点 r 有有限导数 $f'(r)$，那么，利用(72)式和条件(71)，有

$$\lim_{y\uparrow r}\alpha(y)[f(y)-f(r)]$$

$$=\lim_{y\uparrow r}\alpha(y)(r-y)\frac{f(y)-f(r)}{r-y}$$

$$=-\alpha f'(r).$$

而且由 $f'(r)$ 的存在性可知，对 $u\uparrow r$，有 $f(u)-f(r)\sim -f'(r)(r-u)$；因而由级数 $\Sigma\pi(u)(r-u)$ 的收敛性可推出级数 $\Sigma\pi(u)\ [f(u)-f(r)]$ 的收敛性. 因此，(104)式中的分子趋于

$$\sum_u \pi(u)[f(u)-f(r)]-\alpha f'(r)-\gamma f(r). \tag{105}$$

于是，如果 $\beta>0$，我们就得到

$$\mathfrak{A}f(r)=\frac{1}{\beta}\Big\{\sum_u \pi(u)[f(u)-f(r)]$$

$$-\alpha f'(r)-\gamma f(r)\Big\},$$

或者

$$\beta\mathfrak{A}f(r)+\alpha f'(r)+\gamma f(r)$$

$$+\sum_u \pi(u)[f(u)-f(r)]=0. \tag{106}$$

如 $\beta=0$，那么 $f'(r)$ 的有限性仍不能保证极限(104)的存在. 然而在任何情况下，要使 $\mathfrak{A}f(r)$ 有限，需要分子的极限为零. 当令(105)式等于零时，我们再一次得到在 $\beta=0$ 时

的(106)式. 最后，(106)式对吸收边界 r 也是成立的. 因为这时

$$\alpha=\gamma=\pi(u)=\mathfrak{A}f(r)=0.$$

这样，无论在什么样情况下，为了使函数 f 在点 r 具有有限导数，且使它属于特征算子 $\mathfrak{A}$ 的定义域，方程(106)是一个必要条件. 通常称(106)式为过程 $X(t)$ 或算子 $\mathfrak{A}$ 的边界条件. 显然，用形如(106)的式子来描述等价于用一组非负数 α, β, γ 和 $\pi(u)$ (精确到一个正的因子)来描述，因此，A 类的生灭过程的每一种延续都对应着唯一确定的边界条件，而且，根据这个边界条件可唯一生成这个延拓过程

换句话说，一个 A 类过程，由算子 $\frac{1}{2}D_{\mu}D_{u}$ 以及边界条件(106)所描述，此算子在内点上定义了此过程.

在§8和§9曾表明系数 α, β, $\gamma=\pi(-1)$ 和测度 π 必须满足条件

$$\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma\geqslant 0,\ \pi(u)\geqslant 0,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\sum_u \pi(u)^2>0,$$
$$\alpha v(r)<\infty,$$
$$\sum_u \pi(u)[S(u)-S(r)]<\infty. \tag{107}$$

迄今，我们还不知道对于预先给定参数 α, β, γ 和 π 的过程 $X(t)$，上述条件是否是该过程存在的充分条件. 为了回答这个问题，需要用到其它数学方法，这里仅限于叙述这些结果并给出一些较显然的解释. 可以证明，边界条件(106)(其中系数满足不等式组(107))总是对应着一个马尔可夫过程 $X(t)$，但有时这个过程不是 A 类过程. 事实上，对于参数 α, β, γ 和 π 的某些值，质点在时刻 T 到达边界点 r 时又立刻从那里跳出相当远的距离. 因此，关系式

$$\lim_{h \downarrow 0} X(T+h) = r \tag{108}$$

不成立，而它是从§7中定义A类过程时所做的假设4和5得到的。如果$\beta > 0$，那么位于r的质点在它离开任一邻域$U \ni r$之前，在状态r（平均来说）将逗留一段正的时间。对$\beta > 0$，只要条件(108)满足，"平均来说"一词可以用"概率为1"一词所代替。如果级数$\Sigma\pi(u)$发散，那么(108)式仍成立，因为这时先是质点无穷多次跳跃到点r附近的点，然后才从r首次跳出这个固定的邻域U的范围之外。如果$\beta = 0$且级数$\Sigma\pi(u)$收敛，那么α大于零是条件(108)的充分条件。于是由(72)式可知，当$y \uparrow r$时，$\alpha(y) \to \infty$，而$\sum_{u \leqslant y} \pi(u)$仍有界。因此，对靠近$r$的$y$，从$r$直接跳到状态$-1, 0, u_1, \cdots, y$的可能性比起从$r$经过在右边最靠近$y$的状态到达$y$的可能性要小得多。于是，在极限过程中先是在点$r$多次反射，然后才从$r$首次跳出，并且条件(108)满足。最后只剩下

$$\alpha = \beta = 0, \quad \sum_{u} \pi(u) < \infty \tag{109}$$

的情形。这时质点在时刻T跳跃，其分布为π，但条件(108)不成立。具有这样参数的边界条件不适用于任何A类过程。在(109)的情况下，一般说来，可以不把点r并入状态空间。

§11. 唯一性定理

对具有一个给定特征算子的A类过程，现在来证明在§7所提到的唯一性定理。

首先把这个问题更确切地陈述一下，考虑过程$X(t)$的转移函数

$$p(t, u, v) = P_u\{X(t) = v\} \quad (t \geqslant 0),$$

其中 u 和 v 是空间 $E=\{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots, r\}$ 中任意两点. 在时间连续的情况下,转移函数 $p(t, u, v)$ 所起的作用,如同在离散时间的马尔可夫链中,转移概率 $p(x, y)$ 所起的作用一样,利用马尔可夫性,事件

$$A=\{X(t_1)=v_1, X(t_2)=v_2, \cdots, X(t_n)=v_n\} \quad (110)$$
$$(0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$$

的概率可按照公式

$$P_u\{A\}=p(t_1, u, v_1)p(t_2-t_1, v_1, v_2)\cdots$$
$$\cdots p(t_n-t_{n-1}, v_{n-1}, v_n)$$

用 $p(t, u, v)$ 来表示. 这表明,如果两个过程的转移函数相同,那么对这两个过程中形如(110)的所有事件的概率也相同. 因此,由事件(110)借助于加法(互斥事件),减法以及单调取极限所得到的所有事件的概率也相同. 可以证明,对于 A 类过程,所有与轨道状况有关的事件都可以这样得到(精确到概率为 0 的事件),因而具有相同转移函数的两个 A 类过程没有本质上的差别[1]. 因此,虽然 A 类过程作为轨道集上的一族概率测度 P_u,不是由转移函数唯一确定的,但是从实用的角度,具有同样转移函数 $p(t, u, v)$ 的过程将不加以区分,我们将证明,**一个 A 类过程的转移函数由它的特征算子 $\mathfrak{A}$ 所唯一确定.**

对于连续函数 $f(u)(u \in E)$,我们来考虑由关系式

$$R_\lambda f(u)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} M_u f(X(t)) dt \quad (\lambda>0) \quad (111)$$

所定义的算子 R_λ,称这个算子为过程 $X(t)$ 的**预解式**. (注意,如果 $f \geqslant 0$,那么 $R_\lambda f$ 就变成函数 f 的 α 位势,其中 $\alpha=$

---

1) 两个这样过程中的任何一个总可以从另一个由加到轨道集上某一集 B 并且从它减去一个集 C 而得到,其中 B, C 对所有 $u \in E$,有 $P_u\{B\}=P_u\{C\}=0$.

$e^{-\lambda}$，参见第三章§8.）

特别，如果在点 $v \neq r$ 上，$f(v) = 1$，而在所有其它点上 f 等于零，那么 $M_u f(X(t)) = p(t, u, v)$，且

$$R_\lambda f(u) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, u, v) dt.$$

如果对所有状态 u，$f = 1$，那么 $M_u f(X(t)) = P_u\{\zeta > t\}$，且

$$R_\lambda f(u) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_u\{\zeta > t\} dt.$$

右边是函数 $p(t, u, v)$ 和 $P_u\{\zeta > t\}$ 的 Laplace 变换. 在分析中已经证明，如果函数 $\varphi(t)(t \geqslant 0)$ 有界，右连续且对任意 $\lambda > 0$，有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t) dt = 0,$$

那么 φ 恒等于零(例如见[4]第46页). 概率 $P_u\{\zeta > t\}$ 关于 t 是右连续的，因为当 $h \downarrow 0$ 时，事件 $\{\zeta > t + h\}$ 单调收敛到事件 $\{\zeta > t\}$. 由轨道的右连续性可知，对 $v \neq r$，函数 $p(t, u, v)$ 关于 t 也是右连续的[1]. 因此，具有相同预解式的 A 类过程具有同样的函数 $p(t, u, v)(v \neq r)$ 和 $P_u\{\zeta > t\}$. 由于

---

1) 事实上，对任意一对状态 $x \neq v$，在时间 $h > 0$ 之内从 x 到 v 的轨道集合 A_h，当 $h \downarrow 0$ 时单调收敛到空集. 由于条件 $X(0) = x$，$X(h) = v$ 蕴涵事件 A_h，所以 $p(h, x, v) \leqslant P_x\{A_h\}$，且 $P_x\{A_h\}$ 收敛到零意味着 $\lim\limits_{h \downarrow 0} p(h, x, v) = 0$ $(x \neq v)$. 如果 $v = u_n$，根据(9)式，$p(h, v, v) > e^{-a_n h}$，因而 $\lim\limits_{h \downarrow 0} p(h, v, v) = 1$ $(v \neq r)$. 由此再对方程

$$p(t + h, u, v) = \sum_{x \in E} p(t, u, x) p(h, x, v)$$

(它是马尔可夫性的一个直接推论)令 $h \downarrow 0$ 取极限(在这个无穷级数中逐项取极限是合理的，这是因为第二个因子是以1为界，而由第一个因子组成的级数是绝对收敛的).

$$P(t, u, r) = P_u\{\zeta > t\} - \sum_{v \neq r} p(t, u, v),$$

在这种情况下，这些函数 $p(t, u, r)$ 也是相等的，即转移函数是完全一样的。 于是只需验证预解式 R_λ 是由特征算子 $\mathfrak{A}$ 唯一确定的即可。

先将定义 R_λ 的关系式 (111) 变形. 函数 $f(X(t))$ 只对 $t < \zeta$ 有意义. 用 $\eta(t)$ 表示一个函数，当 $t < \zeta$ 时，它等于 $f(X(t))$，当 t 取其之所有值时，它为零. 于是有[1)]

$$\begin{aligned} R_\lambda f(u) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_u f(X(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_u \eta(t)\,dt \\ &= M_u \int_0^\infty e^{-\lambda t} \eta(t)\,dt. \end{aligned}$$

由此得到

$$R_\lambda f(u) = M_u \int_0^\zeta e^{-\lambda t} f(X(t))\,dt. \tag{112}$$

现在证明，算子 R_λ 将连续函数变换成连续函数，即

$$\lim_{u \uparrow r} R_\lambda f(u) = R_\lambda f(r).$$

由于过程在轨道首次到状态 r 的时刻 T 之前不能终止，所以由(112)式得到

$$\begin{aligned} R_\lambda f(u) = {} & M_u \int_0^T e^{-\lambda t} f(X(t))\,dt \\ & + M_u \int_T^\zeta e^{-\lambda t} f(X(t))\,dt \\ = {} & M_u \int_0^T e^{-\lambda t} f(X(t))\,dt \end{aligned}$$

---

1)这里把对 t 的积分与对所有轨道的积分的次序作了交换，如果积分是绝对收敛的，那么这是合理的(Fubini 定理). 引进变量 $\eta(t)$ 是为了得到一个在整个轨道集上对每一个 t 都有定义的函数.

$$+ M_u e^{-\lambda T}\int_0^{\zeta-T} e^{-\lambda s} f(X(T+s))ds. \quad (113)$$

因为T是马尔可夫时间且 $X(T)=r$，所以根据强马尔可夫性，过程

$$Y(s)\equiv X(T+s)$$

与从点r出发的过程 $X(s)$ 的概率分布相同这里过程 $Y(S)$ 与随机变量T独立，显然$\zeta-T$是轨道 $Y(s)$ 的终止时刻．因此(113)式中的第二项等于

$$M_u e^{-\lambda T} M_r \int_0^{\zeta} e^{-\lambda s} f(X(s))ds = R_\lambda f(r)\cdot M_u e^{-\lambda T},$$

于是(113)式呈现出

$$R_\lambda f(u) = M_u \int_0^T e^{-\lambda t} f(X(t))dt + R_\lambda f(r)\cdot M_u e^{-\lambda T}$$

的形式．由于函数f连续，所以 $|f(u)|$ 以某一常数C为界．从上一式子两边减去 $R_\lambda f(r)$ 并借助于不等式 $1-e^{-x}\leqslant x$ $(x\geqslant 0)$，就得到

$$|R_\lambda f(u) - R_\lambda f(r)| \leqslant \left| M_u \int_0^T e^{-\lambda t} f(X(t))dt \right|$$

$$+ |R_\lambda f(r)| M_u(1-e^{-\lambda T})$$

$$\leqslant CM_uT + |R_\lambda f(r)|\cdot \lambda M_u T.$$

再根据(45)式，当 $u\uparrow r$ 时，有 $M_uT = S(u)-S(r)\to 0$，于是证明了我们的断言．

下一步是证明等式

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda \ (\lambda,\mu>0). \quad (114)$$

注意，R_λ的表示式(111)可以改写成

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt,$$

其中算子P_t由关系式

$$P_t f(u) = M_u f(X(t)) \ (t\geqslant 0)$$

所定义．在第三章§8曾证明

$$P_sP_t = P_{s+t} \quad (s, t \geqslant 0)$$

（读者自己可以验证，在这个证明过程中只用到了马尔可夫性，而没有用到 Wiener 过程的特性）．因此[1]

$$\begin{aligned}R_\mu R_\lambda &= \int_0^\infty e^{-\mu s}P_sP_\lambda ds\\&= \int_0^\infty e^{-\mu s}P_s\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t dtds\\&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\mu s-\lambda t}P_{s+t}dtds.\end{aligned}$$

改用新的变量 s 和 $z = s + t$，得到

$$\begin{aligned}R_\mu R_\lambda &= \int_0^\infty e^{-\lambda z}\left(\int_0^z e^{(\lambda-\mu)s}ds\right)P_z dz\\&= \frac{1}{\lambda-\mu}\int_0^\infty (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z})P_z dz\\&= \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda-\mu}.\end{aligned}$$

下面证明，如果 f 连续且 $F = R_\lambda f$，那么

$$f = \lambda F - \mathfrak{A}F. \tag{115}$$

先验证这样一个事实：如果点 r 是吸收边界，那么在 r 点(115)式成立．事实上，在这种情况下，$\mathfrak{A}f(r) = 0$ 且

$$\begin{aligned}F(r) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}M_r f(X(t))dt\\&= f(r)\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\\&= \frac{1}{\lambda}f(r).\end{aligned}$$

在所有其它情况下，对点 u 的充分小邻域 U 都有 $M_u\tau < \infty$，其中 τ 是首次离开 U 的时间（当 $u = u_0$ 时，可以假定

1）见第194—195页的注。

$U = u_n$，因此 $M_u\tau = \frac{1}{a_n}$；当 $u = r$ 时，$M_u\tau$ 的有限性在 §7 最后已验证过)．利用函数 f 的连续性和 $F = R_\lambda f$，可以取点 u 的一个邻域 U，在其中函数 $\lambda F - f$ 的摆动总小于预先给定的 $\varepsilon > 0$．用(114)式把函数 $F = R_\lambda f$ 表示成

$$F = R_\mu g \quad (\mu > 0),$$

的形式，其中

$$g = f + (\mu - \lambda) F.$$

在 0 和 ζ 之间插入轨道首次离开 U 的时刻 τ，并利用 $R_\mu g$ 的表示式(112)，可得到

$$F(u) = M_u \int_0^\tau e^{-\mu t} g(X(t)) dt$$

$$+ M_u e^{-\mu\tau} \int_0^{\zeta-\tau} e^{-\mu s} g(X(\tau + s)) ds \qquad (116)$$

(参看(113)式的推导)．根据强马尔可夫性，在 $X(\tau) = v$ 的条件下，过程 $Y(s) = X(\tau + s)$ 与随机变量 τ 独立并且与初始时刻在点 v 的过程 $X(s)$ 同分布．时间 $\zeta - \tau$ 为 $Y(s)$ 的终止时间．因而条件均值为

$$M_u\left(e^{-\mu\tau} \int_0^{\zeta-\tau} e^{-\mu s} g(X(\tau + s)) ds \mid X(\tau) = v\right)$$

$$= M_u(e^{-\mu\tau} \mid X(\tau) = v)$$

$$\cdot M_v \int_0^\zeta e^{-\mu s} g(X(s)) ds$$

$$= M_u(e^{-\mu\tau} \mid X(\tau) = v) R_\mu g(v)$$

$$= M_u(e^{-\mu\tau} R_\mu g(X(\tau)) \mid X(\tau) = v).$$

用 $P_u\{X(t) = v\}$ 乘这个式子并对 $v \in E$ 求和，得到

$$M_u e^{-\mu\tau} \int_0^{\zeta-\tau} e^{-\mu s} g(X(\tau + s)) ds$$

$$= M_u e^{-\mu\tau} R_\mu g(X(\tau))$$

$$= M_u e^{-\mu\tau} F(X(\tau)).$$

因此，(116)又取如下形式

$$F(u)=M_u\int_0^\tau e^{-\mu t}[f(X(t))+(\mu-\lambda)F(X(t))]dt+M_u e^{-\mu\tau}F(X(\tau))$$

且当 $\mu\downarrow 0$ 时变成

$$F(u)=M_u\int_0^\tau [f(X(t))-\lambda F(X(t))]dt+M_u F(X(\tau)) \tag{117}$$

(在均值与积分号内取极限是合理的，这是因为函数 f 与 F 有界且 $M_u\tau<\infty$)。由(117)式得到

$$\frac{M_u F(X(\tau))-F(u)}{M_u\tau}=\frac{1}{M_u\tau}M_u\int_0^\tau [\lambda F(X(t))-f(X(t))]dt.$$

从两边减去量

$$\lambda F(u)-f(u)=\frac{1}{M_u\tau}M_u\int_0^\tau [\lambda F(u)-f(u)]dt,$$

并利用函数 $\lambda F-f$ 在 U 内摆动小于 ε 这一事实，就得到

$$\left|\frac{M_u F(X(\tau))-F(u)}{M_u\tau}-[\lambda F(u)-f(u)]\right|\leqslant\frac{1}{M_u\tau}M_u\int_0^\tau \varepsilon dt=\varepsilon.$$

这意味着

$$\lim_{U\downarrow u}\frac{M_u F(X(\tau))-F(u)}{M_u\tau}=\lambda F(u)-f(u),$$

即 $\mathfrak{A}F(u)=\lambda F(u)-f(u)$. (115)式由此得证.

现在我们能够证明算子 R_λ 由特征算子 $\mathfrak{A}$ 唯一确定，并由此证明，具有给定特征算子的 A 类过程的唯一性. 我们已经证明，函数 $F=R_\lambda f$ 是连续的且满足方程 $\lambda F-\mathfrak{A}F=f$. 因此，只需验证对于任意的 f，方程 $\lambda F-\mathfrak{A}F=f$ 最多只有

一个连续解．如果这个方程有两个不同的连续解，它们的差将是齐次方程

$$\lambda F - \mathfrak{A}F = 0 \tag{118}$$

的一个连续非零解．于是，剩下来的只需证明，方程(118)在连续函数类 F 中只有一个零解．

方程(118)的连续解 $F(u)$ 在某一点 v 取到它的极大值 $M = F(v)$．事实上，$F(u)$ 的连续性意味着

$$F(r) = \lim_{n\to\infty} F(u_n).$$

如果对所有的 n，$F(u_n) \leqslant F(r)$，那么在点 r 取到极大值；如果对某个 n，$F(u_n) > F(r)$，那么由连续性对从某个 m_0 开始的所有 m，$F(u_n) > F(u_m)$．显而易见，数 $F(u_0), F(u_1), \cdots, F(u_{m_0})$ 中的最大值小于函数 F 的极大值．假定 $M > 0$，因为在首次离开点 v 的邻域 U 的时刻 τ，有

$$F(X(\tau)) \leqslant M = F(v),$$

由此可知

$$M_v F(X(\tau)) \leqslant F(v),$$

因此，

$$\mathfrak{A}F(v) = \lim_{U\downarrow v} \frac{M_v F(X(\tau)) - F(v)}{M_v \tau} \leqslant 0.$$

另一方面，由方程(118)可知

$$\mathfrak{A}F(v) = \lambda F(v) = \lambda M > 0.$$

所得到的矛盾说明 $M \leqslant 0$．类似地可以证明，函数 $F(u)$ 的最小值 m 是非负的．因而 $F = 0$，唯一性由此得证．

习　　题

平均离开时间

在习题 1 和 2 中，用不同的方法导出了在 §5 所得到的关于平均离开时间的关系式．

1. 设 m_n 是位于 u_n 的质点到达 u_{n+1} 的平均时间。证明关系式

$$m_n = \frac{1}{a_n} + q_n(m_{n-1} + m_n).$$

由这个关系式导出公式

$$m_n = \frac{1}{a_0 p_0} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} + \frac{1}{a_1 p_1} \frac{q_2 \cdots q_n}{p_2 \cdots p_n} + \cdots + \frac{1}{a_n p_n}. \tag{119}$$

2. 从(119)式推出(44)和(43)式.

提示. 在标准尺度中,

$$m(u,b) = m(u;a,b) + \frac{b-u}{b-a} m(a;b).$$

边界分类

如果对所有 $a < u < r$, 有 $m(u;a,r) < \infty$, 那么称边界 r 有限; 如果对所有 $a < u < r$, 有 $m(u;a,r) = \infty$, 那么称边界 r 非有限; 当 $u \uparrow r$ 时, $m(u;a,r) \to \infty$, 称边界 r 弱有限; 当函数 $m(u;a,r)$ 有界, 称边界 r 强有限(见[4]).

3. 如果 $|S(r)| < \infty$, 那么吸引边界是强有限的; 如果 $|S(r)| = \infty$, 那么吸引边界是非有限的.

4. 如果 $v(r) < \infty$ 且当 $u \uparrow r$ 时, $S(u)$ 的图象有一个渐近线, 那么排斥边界是强有限的; 如果 $v(r) < \infty$ 但当 $u \uparrow r$ 时, $S(u)$ 的图象没有渐近线, 那么排斥边界是弱有限的;如果 $v(r) = \infty$, 那么排斥边界是非有限的.

在状态 u_k 和 u_{k+1} 之间插入一个反射壁,即每一次认为质点不是从 u_k 到达 u_{k+1}, 而是从 u_k 又返回到 u_k. 用 $\bar{m}_k(u)$ 表示在这种情况下从 $u(0 \leqslant u \leqslant u_k)$ 到 0 所需的平均时间,当 $k \to \infty$ 时, $\bar{m}_k(u_k)$ 保持有界,我们就说边界 r 是可透的;当

$k \to \infty$ 时，$\bar{m}_k(u_k) \to \infty$，就说 r 是不可透的(由习题 6 显而易见，这个定义与 § 9 的定义是一致的)．

5. 对于位于 0 和 u_k 之间的所有 u_n，函数 $\bar{m}_k(u)$ 都满足(31)式．为了使此式在点 u_k 也成立，那么在点 $u = u_{k+1}$ 处应如何来定义 $\bar{m}_k(u)$ 呢？

6. 当 $V(r) < \infty$ 时，吸引边界是可透的；当 $v(r) = \infty$ 时，吸引边界是不可透的．

提示． 在边界条件 $\bar{m}_k(0) = 0$，$\bar{m}_k(u_k) = \bar{m}_k(u_{k+1})$ 下求方程(31)的解．

7. 如果一个排斥边界是强有限的，那么它是可透的；如果一个排斥边界是弱有限的或者是非有限的，那么它是不可透的．

8. 边界的强有限性等价于它的可及性或可透性．

轨道 $X(t)$ 的跳跃

在下面一组习题中，$X(t)$ 表示从点 r 出发的 A 类过程，其中假定边界 r 是非吸收的．如同 § 8 和 § 9 一样，假设质点在消失时刻到达了状态 -1．注意，对 $t \geq 0$，轨道 $X(t)$ 是右连续的．

9. 对所有 $t > 0$，极限 $X(t-0)$ 概率为 1 地存在且有限．

提示． 在有限时间 $[0, t]$ 之内，轨道到达与 r 不同的任何状态 u 至多有限次的概率为 1．

我们规定，如果 $X(t-0) = x$，$X(t+0) = X(t) = y$．$(y \neq x)$，那么，从状态 x 到状态 y 的跳跃发生在时刻 t．由习题 9 可知，轨道 $X(t)$ 除了这些跳跃外，概率为 1 地不再有不连续点．

10. 除了向相邻的状态跳跃和从 r 跳出以外，在整个轨道 $X(t)$ 上概率为 1 地不存在跳跃．

提示. 考虑质点第一次，第二次以及以后各次到达状态 $x \neq r$ 并利用强马尔可夫性和对习题 9 的提示.

设 τ_y 是轨道首次到达状态区间 $[-1, 0, \cdots, y)$ 的时间，η_y 是在 τ_y 之前最后离开 r 的时间（η_y 是满足 $X(t-0)=r$，且 $t \leqslant \tau_y$ 的那样一些 t 的上确界）. 由习题 9 容易推出，概率为 1 地有 $X(\eta_y-0)=r$.

11. 在时刻 τ_y，出现从 r 到 u 的跳跃的概率为 $\pi(u)/\lambda(y)$，而在同一时刻从 y 的右边最邻近的状态跳到 y 的概率为 $\alpha(y)/\lambda(y)$.

提示. 对于状态 $u<y$，这正是习题 10 和 (69) 式的结果，在时刻 τ_y，从 r 跳到点 y 的概率可以这样来计算：在时刻 τ_z 首次从 r 跳到 y 的概率，加上在第二次从 r 到达 $[-1,z]$ 的时刻首次跳到 y 的概率，这样加下去，再利用 (82) 式（z 是 y 与 r 之间的任一状态）.

12. 质点在时刻 η_y 的分布由下式给出

$$\lambda(y)P\{X(\eta_y)=u\}=\begin{cases}\pi(u), & u \leqslant y,\\ \pi(x)\dfrac{r-u}{r-y}, & y<u<r,\\ \dfrac{\alpha}{r-y}, & u=r.\end{cases}$$

提示. 当 $u \leqslant y$ 时，这可由习题 11 得出；当 $y<u<r$ 时，可在 u 和 r 之间选一状态 z，并把从 r 跳到 u 的概率看成是从 r 第一次，第二次，以及以后各次到达区间 $[-1, z]$ 的概率之和；当 $u=r$ 时，只需从 1 减去前面已求出的概率.

13. 如果 $\pi(u)=0$，那么从 r 跳到 u 的概率等于 0. 如果 $\pi(u)>0$，$u \neq -1$，$\gamma=\pi(-1)>0$，那么从 r 跳到 u 的概率大于零而小于 1，如果 $\pi(u)>0$ 而 $\gamma=0$ 或 $u=-1$，那么这个概率等于 1.

引进一个缩写记号 $\pi(U)=\Sigma\pi(u)$，其中求和是对所有 $u\in U$ ($\pi(r)$ 看作零)。用 A_U 表示事件："质点在某一时刻从点 r 跳到 U"。

14. 设 U 是有限的，$\pi(U)>0$，那么从 r 首次跳到 U 时，质点跳到 $u\in U$ 的概率等于 $\pi(u)/\pi(U)$（看成关于条件 A_U 下的条件概率）。

提示. 在所有 $u\in U$ 的右边取一状态 z，且在从 r 第一次、第二次以及以后各次到达区间 $[-1, z]$ 时，考虑自 r 到 u 的可能有的跳跃。

15. 如果 $\pi(E)>0$，那么质点首次从 r 跳到点 u 的概率为 $\pi(u)/\pi(E)$。

提示. 在上一习题中，对固定的 u，令 $U\uparrow E$ 取极限。

16. 当 $0<\pi(E)<\infty$ 时，概率为 1 地存在一个从 r 首次跳出；当 $\pi(E)=\infty$ 时，概率为 1 地不存在从 r 首次跳出。

17. 如果 $\pi(E)=\infty$，那么从 r 跳到一个固定的状态 u 之前，概率为 1 地有无穷多次从 r 出发的其它跳跃。

轨道 $X(t)$ 在边界 r 的反射

如果在时刻 s 出现了一次从 r 出发的跳跃，那么

$$X(s-0)=r,\quad X(s)=X(s+0)\neq r.$$

现在假定 $X(t-0)=X(t+0)=r$，于是质点在任何一段时间 $(t, t+\delta)(\delta>0)$ 内都有可能返回到 r。如果不是这种情形，那么我们称 t 是**反射时间**，把质点在 r 外边的最大区间 (t, t') 称为反射区间(见图 50，在这个图中，为了更形象，用连续曲线代替了阶梯函数的折线)。如果在这段时间内质点停留在状态 x，那么就说发生了 x **反射**。

18. 设 x 为不等于 r 的任一状态，那么在任何有限时间区间内，概率为 1 地不会出现多于有限次的 x 反射。

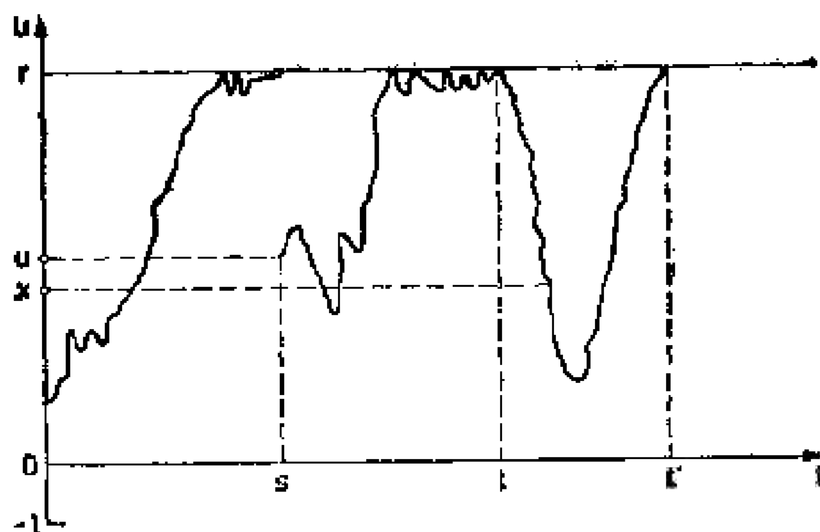


图 50

由习题 18 可知，或者概率为 1 地存在一个首次 x 反射，或者不存在 x 反射．我们约定用 δ_x 表示首次 x 反射的时间（如果 x 反射不存在，那么令 $\delta_x = +\infty$）．

19. 如果 $\alpha = 0$，那么

$$P_r\{\text{对所有 } x,\text{ 有 } \delta_x = +\infty\} = 1$$

（概率为 1 地不出现反射）．

提示． 用包含关系

$$\{\delta_x < \tau_x\} \subset \{X(\eta_x) = r\}$$

（见习题 12）．

20. 如果 $\alpha > 0$，那么

$$P_r\{\text{对所有 } x,\text{ 有 } \delta_x < \infty\} > 0$$

（当 $\alpha > 0$ 且 $r = 0$ 时，这个概率等于 1）．

提示． 见习题 12．

21. 对于 $\alpha > 0$ 且 $0 \leqslant x \leqslant y < r$，有

$$P_r\{\delta_y = \delta_x \mid \delta_y < \infty\} = \frac{r - y}{r - x}.$$

22. 对 $\alpha > 0$，概率为 1 地不存在首次反射．

提示. 如果 δ 是首次反射时间,那么对某个状态 x,有

$$\delta_x = \delta < \infty.$$

显然对所有 $x < y < r$, 有 $\delta_y = \delta_x < \infty$, 再由习题 21,有

$$P_r\{\delta_x = \delta < \infty\} \leqslant \frac{r - y}{r - x}.$$

23. 如果 $\alpha > 0$, $\pi(E) = \infty$, 那么概率为 1 地不存在自 r 出发在其前面没有某种跳跃的 x 反射.

提示. 设 $p_y = P_r$ {在时刻 $\delta_x < \infty$ 之前,不存在从 r 到区间 $[-1, y]$ 的跳跃},借助于习题 12, 对 $y > x$, 得到方程

$$p_y = \frac{\alpha}{(r - y)\lambda(y)}\left(\frac{r - y}{r - x} + \frac{y - x}{r - x} p_y\right);$$

把它与(72)式合在一起,得到估计式

$$p_y \leqslant \frac{\alpha}{(r - x)\pi([-1, y])}.$$

24. 如果 $\alpha > 0$, 用习题 12 的记号,有

$$\lim_{y \uparrow r} P_r\{\eta_y = \delta_y\} = 1$$

(当 y 靠近 r 时,通过一个 y 反射(不是跳跃)而首次到达区间 $[-1, y]$ 的概率接近于 1).

提示. 由级数 $\Sigma\pi(u)(r - u)$ 的收敛性可知.

$$\lim_{y \uparrow r} (r - y) \sum_{u \leqslant y} \pi(u) = 0.$$

因此当 $y \uparrow r$ 时, $\lambda(y)(r - y) \to \alpha$.

25. 如果 $\alpha > 0$, 那么概率为 1 地不存在自 r 出发其前面没有某种反射的跳跃.

提示. 利用习题 24.

边界点 r 的局部时间

在习题 26—31 中, 我们作了附加假设 $\beta > 0$ 和 $\gamma = 0$

(在点 r 平均逗留时间为正的，而且消失是不可能的)[1] 函数 $s(t)$ 表示在时刻 t 之前质点在点 r 所逗留的时间(图 51 表明了这个函数的图象)。

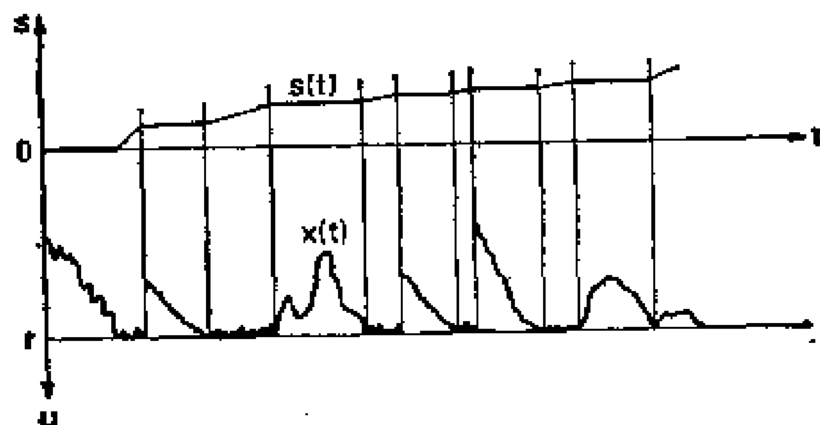


图 51

26. 函数 $s(t)$ 是连续非减的，且当 $t\to\infty$ 时概率为 1 地趋于∞。

提示. 对于非吸收边界 r，为了得到关系式

$$P_r\{\lim_{t\to\infty} s(t)=\infty\}=1$$

(习题的其它部分证明是很简单的)，我们注意，质点概率为 1 地从 r 到达 0 且无穷多次回返(见 § 7 最后)。 设 s_n 是在第 n 次这样的循环中在 r 逗留的时间，于是

$$\lim_{t\to\infty} s(t)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n,$$

其中随机变量 s_n 独立、同分布、非负且以大于 0 的概率取正值(见(96)式)。

由习题 26 可知，概率为 1 地存在一个递增左连续函数($s(t)$ 的反函数) $t(s)=\min\{t:s(t)=s\}$，它定义在整个半轴 $0\leqslant s<\infty$ 上。 这里 $t(0)=0$，且对任意 $s\geqslant 0$，$t(s)$ 是

1) 在 $\beta=0$ 的情形下，也可以引进局部时间，在这方面可参见，例如 Ito 和 Mckean [8] 第二章。这样一类问题的思想来源于 Levy [30]。

一个马尔可夫时间. 利用习题9,可以把 $X(t-0)$ 不总是存在的轨道 $X(t)$ 从我们的讨论中排除，于是，由 $t(s)$ 的实际定义,对每一个 $s>0$, 有关系式 $X(t(s)-0)=r$. 可以证明，对任何固定的 $s>0$, 在时刻 $t(s)$, 轨道 $X(t)$ 概率为 1 地左连续. 因此[1]，有

$$P_r\{X(t(s))=r\}=1\ \ (s\geqslant 0).$$

27. 对初始状态 r，在首次到达区间 $[0, y]$ 之前，在点 r 逗留的时间 ξ_y 具有均值为 $\beta/\lambda(y)$ 的指数分布.

提示. 分析马尔可夫时间 $t(s)$ 时,可推出关系式

$$P_r\{\xi_y\geqslant s_1+s_2\}=P_r\{\xi_y\geqslant s_1\}\cdot P_r\{\xi_y\geqslant s_2\}$$
$$(s_1, s_2>0)$$

并利用附录中的 § 3 与(96)式.

在局部时间轴 s 上，对于状态 r 我们标出质点到达区间 $[0, y]$ 所对应的点 $s_1, s_2, s_3, \cdots$, 由指数分布的一个熟知的性质可知,点 $\{s_i\}$ 形成一个参数为 $\beta/\lambda(y)$ 的 Poisson 流. 这表明落在长为 s 的区间中的点的个数服从参数为 $[\lambda(y)/\beta]s$ 的 Poisson 分布并且对互不重叠的时间区间，落在它们之中的点的个数是相互独立的.

28. 设 $\{s_i\}$ 是参数为 $1/\mu$ 的 Poisson 流,对每一个点 s_i, 与前面的点独立地以概率 p 标上一个星号，那么用星号标记的点形成一个参数为 $1/\mu p$ 的 Poisson 流.

提示. 由于第一个标了星号点的时间 ξ 满足关系式

$$P\{\xi\geqslant a+b\}=P\{\xi\geqslant a\}P\{\xi\geqslant b\}$$
$$(a, b>0).$$

---

1) 一个 A 类过程是拟左连续的(见[4]定理3.13),即如果 τ_n 是马尔可夫时间且 $P_x\{\tau_n\uparrow\tau<\infty\}=1$, 那么 $P_x\{X(\tau-0)=X(\tau)\}=1$. 这里允许令 $t\left(s-\frac{1}{n}\right)$ 表示 τ_n.

第一个标了星号的点 s_i 的下标的均值等于 $1/p$.

29. 从 r 到 u 首次跳跃之前，在点 r 逗留的时间 σ_u 服从均值为 $\beta/\pi(u)$ 的指数分布。

提示. 见习题 12 和 28.

30. 在首次 x 反射之前，在点 r 逗留的时间 ρ_x 服从均值为 $\beta(r-x)/\alpha$ 的指数分布。

31. 修改习题 28，如果对于每一点 s_i 与前面点独立地以概率 p_1 标上星号，以概率 p_2 标上十字 $(p_1+p_2\leqslant 1)$，那么在任意时间区间内标以星号点的个数与标以十字点的个数独立。

提示. 设 s 表示这区间的长，m_1 表示在这个区间内标明星号点的个数，m_2 表示标以十字点的个数. 由习题 28，

$$P\{m_1=k\}=\frac{(p_1 s\mu)^k}{k!}\cdot e^{-p_1 s\mu},$$

$$P\{m_2=l\}=\frac{(p_2 s\mu)^l}{l!}e^{-p_2 s\mu},$$

$$P\{m_1+m_2=k+l\}=\frac{[(p_1+p_2)s\mu]^{k+l}}{(k+l)!}e^{-(p_1+p_2)s\mu}.$$

不论带标记点的位置如何，在连续选取 $k+l$ 个带标记点中标以星号点的个数服从 $p=p_1/(p_1+p_2)$ 的二项分布(星号和十字可互换，这和 Bernoulli 试验中命中与不命中一样)。因此，

$$\begin{aligned}P\{m_1=k,\ m_2=l\}&=P\{m_1+m_2=k+l\}\\&\quad\cdot P\{m_1=k\mid m_1+m_2=k+l\}\\&=\frac{[(p_1+p_2)s\mu]^{k+l}}{(k+l)!}e^{-(p_1+p_2)s\mu}\\&\quad\cdot\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\right)^k\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)^l\\&=P\{m_1=k\}\cdot P\{m_2=l\}.\end{aligned}$$

易将习题 31 推广到 n 个概率

$$p_1, p_2, \cdots, p_n \quad (p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leqslant 1)$$

的情形.

在点 $\{s_i\}$ 之中(见习题 28 前面那部分正文),把它们分为对应于跳到 u_0 的点,跳到 u_1 的点,…,跳到 $u_n = y$ 的点,以及对应于 x 反射的点(x 为区间 $[0, y]$ 上的一固定状态). 由习题 31 可知,它们形成 $n+2$ 个相互独立的 Poisson 流(这些流的参数可由习题 29 和 30 求出). 由于 n 可以取得任意大,所以从 r 跳到任意其它状态的诸时间也形成在 s 轴上独立的 Poisson 流. X 反射(x 固定)的诸时间形成一个 Poisson 流,它与从 r 出发所有跳跃独立. x 反射时间与 y 反射时间当然是相互独立的. 然而, 如果对任意 $u < x$, 我们来考虑非 u 反射的 x 反射(称它们为狭义 x 反射), 那么也可将反射分解成独立流. 由习题 28 和 31 可推出(如同在跳跃情况一样): 对于不同的 x, 狭义 x 反射形成了在局部时间轴 S 上的独立 Poisson 流,并且这些流与从 r 出发的跳跃流独立. 所有这一切对质点在点 r 的状况给出了一个更形象的说明.

附　　录

§1. 函数 $g(x,y)$ 的估计

我们想按照 Duffin [31] 的方法证明，第一章 §3 所给出的关于函数 $g(x, y)$ 的渐近估计式. 和推导常返判别法时一样，只讨论三维的情形.

由于 $g(x, y)$ 只与差 $x-y$ 有关，所以只需分析 $g(x,0)$ 即可. 引进缩写记号

$$\theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \quad \|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$d\theta=d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \quad \rho=\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2},$$

$$\theta x=\theta_1 x_1+\theta_2 x_2+\theta_3 x_3.$$

如前所述，用 Q 表示立方体：$|\theta_1| \leqslant \pi$, $|\theta_2| \leqslant \pi$, $|\theta_3| \leqslant \pi$. 于是

$$g(x, 0)=\frac{3}{(2\pi)^3}\int_Q F(\theta) e^{i\theta x} d\theta, \tag{1}$$

其中

$$F(\theta)=\frac{1}{3-\cos\theta_1-\cos\theta_2-\cos\theta_3}. \tag{2}$$

我们来证明，

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\| g(x, 0)=\frac{3}{2\pi}. \tag{3}$$

(1) 式表明 $g(x, 0)$ (除了差一个常数因子外)是具有下标 $x=(x_1, x_2, x_3)$ (x_1, x_2, x_3 是整数)的函数 $F(\theta)$ 的 Fourier 系数.

注意到，如果一个周期函数 $H(\theta)$（每一个自变量都以 2π 为周期）有连续二阶导数，那么它的 Fourier 系数

$$h(x)=\int_Q H(\theta)e^{i\theta x}d\theta \tag{4}$$

满足条件

$$h(x)=O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \tag{5}$$

（这里和在别处，$O(\alpha)$ 都表示一个不超过 α 乘以某个常数的量）. 于是，设 Δ 是变量 θ 空间中的 Laplace 算子，根据 Green 公式，有

$$\int_Q H\cdot\Delta e^{i\theta x}d\theta=\int_Q \Delta H\cdot e^{i\theta x}d\theta, \tag{6}$$

这是因为，利用被积函数的周期性，立方体 Q 的相对面上的曲面积分相互抵消了. 由于 $\Delta e^{i\theta x}=-\|x\|^2e^{i\theta x}$，于是由(6)式可知

$$\begin{aligned}|h(x)|&=\frac{1}{\|x\|^2}\left|\int_Q \Delta He^{i\theta x}d\theta\right|\\&\leqslant\frac{1}{\|x\|^2}\int_Q|\Delta H|d\theta,\end{aligned} \tag{7}$$

并得到估计式(5).

当函数 H 的导数在零点有一个不太高阶的奇点时，（而且函数 H 在立方体 Q 的所有其它点上都具有二阶连续导数）估计式(5)仍成立. 特别地，只要函数 H 是有界的，它的一阶偏导数等于 $O(1/\rho)$，且它的二阶偏导数 $\partial^2H/\partial\theta_1^2$，$\partial^2H/\partial\theta_2^2$，$\partial^2H/\partial\theta_3^2$ 都等于 $O(1/\rho^2)$ 即可. 事实上，把 Green 公式应用于区域 $Q\backslash K$，其中 K 是包含点 0 的小立方体，借助于导数 $\partial H/\partial\theta_1$，$\partial H/\partial\theta_2$ 和 $\partial H/\partial\theta_3$ 的估计式，在小立方体表面积分趋于零，通过取极限得到(6)式. 由二阶导数的估计可知，(7)式中的积分收敛. 从而又得到了(5)式.

我们所感兴趣的函数 $F(\theta)$ 在零点具有较高阶奇异性. 根据需要，对(2)式多次微分并写出正弦或余弦 Taylor 展开式中的前两项或前三项，于是对充分小的 ρ 得到

$$\left.\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{\rho^2 + O(\rho^4)}, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_i} &= \frac{-4\theta_i + O(\rho^3)}{\rho^4 + O(\rho^6)}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_i^2} &= \frac{16\theta_i^2 - 4\rho^2 + O(\rho^4)}{\rho^6 + O(\rho^8)}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

从 $F(\theta)$ 减去函数 $2/\rho^2$ 可以减弱这奇异性，这是因为，前者与后者在零点附近的状况类似. 由(8)式易推出函数 $F(\theta)-(2/\rho^2)$ 已经满足前面加给 $H(\theta)$ 的限制，例如

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(F - \frac{2}{\rho^2}\right) &= \frac{-4\theta_i + O(\rho^3)}{\rho^4 + O(\rho^6)} + \frac{4\theta_i}{\rho^4} \\ &= \frac{O(\rho^7)}{\rho^8 + O(\rho^{10})} \\ &= O\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

然而，因为有了被减函数 $2/\rho^2$，所以还不能应用估计式(5). 如果周期性地把它延伸到立方体 Q 的范围之外，那么在这个立方体的表面上将不存在连续二阶和三阶导数. 为了克服这个障碍，我们用一个非增二次连续可微函数 $S(\rho)$ 乘以$2/\rho^2$，其中 $S(\rho)$ 当 $0<\rho\leqslant 1/2$ 时等于 1；当 $1\leqslant\rho<\infty$ 时等于零. 显然，如前所述，函数 $2S(\rho)/\rho^2$ "消除"了函数 $F(\theta)$ 在零点的奇异性. 且在立方体 Q 上积分时，可把这个函数看作为以 2π 为周期的周期函数而毫不影响其平滑性. 现在估计式(5)适用于函数

$$H(\theta) = F(\theta) - \frac{2S(\rho)}{\rho^2},$$

而且我们发现函数 $F(\theta)$ 与 $2S(\rho)/\rho^2$ 的 Fourier 系数彼此相差一个量 $O(1/\|x\|^2)$. 于是,

$$g(x, 0) = \frac{6}{(2\pi)^3}\int_Q \frac{S(\rho)e^{i\theta x}}{\rho^2}d\theta + O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right). \tag{9}$$

现在来计算 (9) 式中的积分. 由于函数 S 在立方体 Q 外等于零,所以可以用在整个空间 R^3 上的积分代替在区域 Q 上的积分. 然后旋转坐标轴 θ_1, θ_2 和 θ_3 使得 θ_1 轴通过点 $x=(x_1, x_2, x_3)$. 这时量 ρ, $S(\rho)$ 以及 $d\theta$ 仍不改变, 而且由于在新坐标系中, 向量 x 的坐标为 $(\|x\|, 0, 0)$, 所以数量积 $\theta x = \theta_1x_1 + \theta_2x_2 + \theta x_3$ 变成了 $\theta_1\|x\|$. 再用 $\cos\theta_1\|x\| + i\sin\theta_1\|x\|$ 来代替 $e^{i\theta_1\|x\|}$, 因为 $S(\rho)/\rho^2$ 是变量 θ_1 的偶函数,所以包含正弦项的积分将等于零. 因此,得到

$$\int_Q \frac{S(\rho)}{\rho^2}e^{i\theta x}d\theta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\rho)\cos\theta_1\|x\|}{\rho^2}d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

在等式右边的积分中,根据关系式

$$\theta_1 = \rho\cos\phi, \quad \theta_2 = \rho\sin\phi\cos\varphi, \quad \theta_3 = \rho\sin\phi\sin\varphi$$

变成球坐标积分. 注意到变换的 Jacobi 行列式等于 $\rho^2\sin\phi$, 于是得到

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{S(\rho)}{\rho^2}e^{i\theta x}d\theta &= \int_0^\infty d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi S(\rho)\cos(\|x\|\rho\cos\phi)\sin\phi d\phi \\ &= \frac{4\pi}{\|x\|}\int_0^\infty \frac{S(\rho)\sin(\|x\|\rho)}{\rho}d\rho\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{\|x\|}\int_0^\infty \frac{S\left(\frac{\lambda}{\|x\|}\right)\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda \tag{10}$$

又因为积分 $\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$ 收敛，函数 $S(\lambda/\|x\|)$ 关于 λ 单调，且对所有 x 以同一数为界，所以由 (10) 得到的积分关于 x 一致收敛(见[19] 477 页)．因此，可以在积分号中取极限，得到

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\int_0^\infty \frac{S\left(\frac{\lambda}{\|x\|}\right)\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

再回到 (9) 和 (10) 式，我们就得到

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|g(x,0) = \frac{6}{(2\pi)^3}4\pi\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3}{2\pi}.$$

§2. 上凸函数的某些性质

函数 $f(x)$, $x\in[a,b]$ 称为是该区间上的上凸函数，如果连结 f 图象上任意两点的弦整个地位于这个图象上，或者位于这个图象的下方(如图 52)．从分析上说，对于区间 $[a,b]$ 上的任意两个值 $x_1<x_2$ 与任意满足条件 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p+q=1$ 的两个数 p 和 q，下面不等式

$$f(px_1+qx_2)\geqslant pf(x_1)+qf(x_2) \tag{11}$$

成立．

下面一些上凸函数的性质在第三章曾用到过，现在需要证明．

I. 函数 f 在区间 $[a, b]$ 的所有内点上连续且当 $x\downarrow a$ 与 $x\uparrow b$ 时有有限的极限，并有 $f(a+0)\geqslant f(a)$，$f(b-0)\geqslant f(b)$.

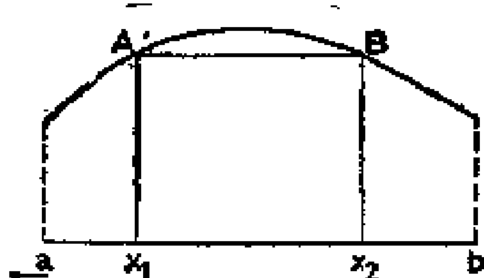


图 52

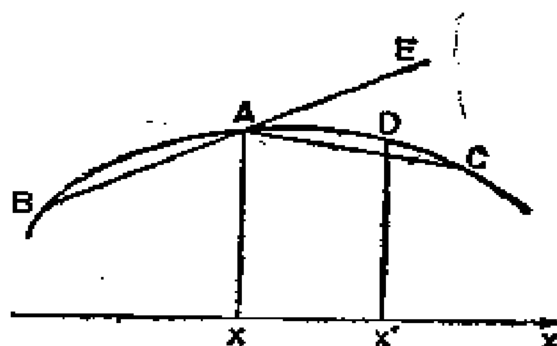


图 53

首先设 x 是这个区间的一个内点，A 为图象上和它对应的点(图 53)．在 f 图象上，于 A 的左右两边分别取点 B 与 C，考虑图象上一动点 D，其横坐标 x' 从右边趋向于 x．画出弦 AC，并延长弦 BA 得到射线 AE．点 D 不可能跑到射线 AE 上去，否则，弦 BD 将从点 A 上面通过．另一方面，当 D 跑到 C 的左边以后，它不可能落在弦 AC 的下方．因而，当 $x'\downarrow x$ 时，点 D 将不会跑出角 EAC，且它的坐标将趋于点 A 的坐标．所以函数 f 在点 x 右连续．类似地可证明函数 f 在点 x 左连续．

现在来考查函数图象上的左端点 A(对右端点的情形可类似地分析)．在图象上取与 A 不同的点 B 并画出弦 AB 与

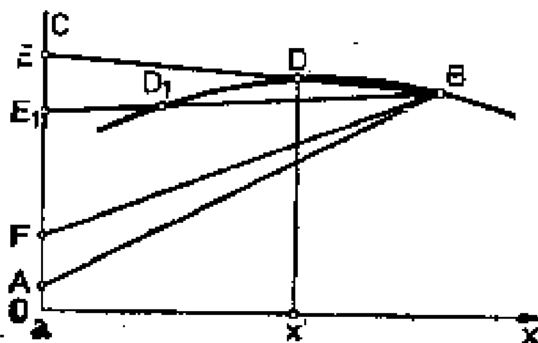


图 54

竖直射线 AC（图 54）．设 D 是图象上的一动点，它的横坐标 x' 从右边趋向于 a．延长弦 DB 直到它与射线 AC 交于点 E。和上一段论证一样，位于 D 左边的点 D_1 不可能处于线段 ED 之上．因此，当 $x'\downarrow a$ 时，点 E 沿直线 AC 单调下降，但不会通过点 A．在极限情况，点 E 处于某个位置 F，其中 $OF\geqslant OA$．由于当 $x'\downarrow a$ 时线段 FE 与 ED 缩减为零，点 D 的坐标趋于点 F 的坐标．因此，有 $f(a+0)=OF\geqslant OA=f(a)$．

II．对任意内点 x，可以选择一线性函数 $\bar{f}$，使它在点 x 与 f 重合而在其它所有点上大于或等于 f．

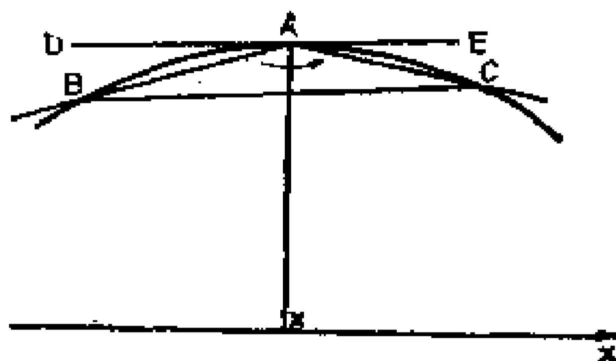


图 55

在函数 f 的图象上，于一固定内点 A 的左右两边分别取动点 B 与 C（图 55）．如前讨论一样，可以肯定，在 B 点的左边，射线 AB 在函数的图象上面，在 C 点的右边，射线 AC，也如此．且当 B 与 C 趋于 A 时，这两条射线单调上升．因为弦 BC 不可能从点 A 的上边通过，所以角 BAC 不会超过 180°（在点 A 的角度按反时针方向度量）．因此，在取极限后，射线 AB 与 AC 分别处于某两个位置 AD 与 AE，角 DAE 仍不超过 180°．如果这个角等于 180°，那么直线 DE 就是我们所要求的函数 $\bar{f}$ 的图象．另一方面，如果角 DAE 小于 180°，那么任一条过点 A 且在角 DAE 外边的直线都可作为 $\bar{f}$ 的图象。

III. 在区间 $[a, b]$ 中任取一组互不重叠的区间 I_α。在每个区间 I_α 上，用一个线性函数 f_α 来代替函数 f，其中 f_α 与 f 在区间 I_α 的端点相等，但是，如果 I_α 有一个端点与点 a（或 b）重合，那么函数 f_α 在点 a（或 b）或者等于或者小于 $f(a)$（或 $f(b)$）。在其它所有点上保持函数 f 不变，这样得到的函数 $\tilde{f}$ 在区间 $[a, b]$ 仍是上凸的（图 56）。

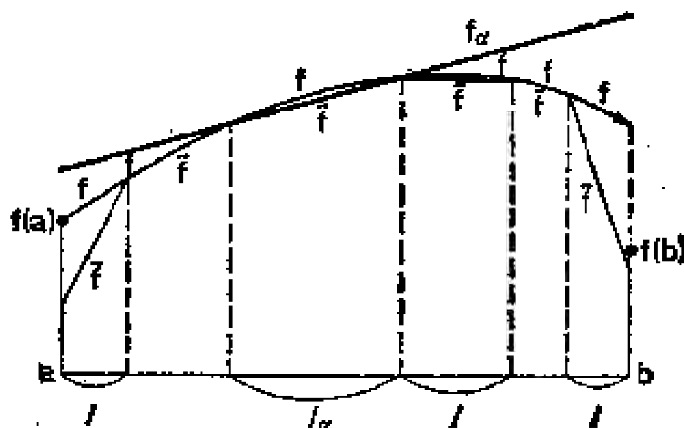


图 56

由上述考虑可知，在区间 I_α 之外 $f_\alpha \geqslant f$。因此，如果 $x \in I_\alpha$，那么对所有 $\beta \neq \alpha$，有 $f_\beta(x) \geqslant f(x) \geqslant f_\alpha(x) = \tilde{f}(x)$；如果 x 不属于任何区间 I_α，那么对所有 α，有

$$f_\alpha(x) \geqslant f(x) \geqslant \tilde{f}(x).$$

因而，函数 $\tilde{f}$ 是函数 f 与 f_α（α 取所有可能值）的下确界。由于函数 f 与 f_α 是上凸的，所以剩下要证明的是：任一族上凸函数 $\{f_\alpha\}$ 的下确界 $\tilde{f}$ 也是上凸函数。为此，只需利用上凸函数的分析条件(11)并注意到，对任 α，有

$$\begin{aligned} f_\alpha(px_1 + qx_2) &\geqslant pf_\alpha(x_1) + qf_\alpha(x_2) \\ &\geqslant p\tilde{f}(x_1) + q\tilde{f}(x_2). \end{aligned}$$

§ 3. 方程 $p(s)p(t)=p(s+t)$ 的解

需要证明在第四章 § 2 曾研究过的函数方程

$$p(s)p(t)=p(s+t)\ (s,t>0) \tag{12}$$

的任一有界解都具有

$$p(t)=e^{-at} \tag{13}$$

的形式，其中 $0\leqslant a\leqslant+\infty$（可认为 $e^{-\infty}=0$）。

我们指出，如果 $p(t)$ 在某一点 $t_0>0$ 处等于零，那么，根据(12)式，对所有 $t\geqslant t_0$，有 $p(t)=0$，而且由关系式

$$p\left(\frac{t}{2}\right)^2=p(t) \tag{14}$$

可知，$p(t_0/2)=0$。因而对所有 $t\geqslant t_0/2$，有 $p(t)=0$。重复这种论证，对所有 $t>0$，就得到 $p(t)=0$，(13)式对 $a=+\infty$ 成立。

现在只需考虑对所有 $t>0$，$p(t)\neq 0$ 的情形。这时方程(14)意味着 $p(t)>0$，可令

$$f(t)=\ln p(t).$$

于是方程(12)变成了方程

$$f(s)+f(t)=f(s+t)\ (s,t>0). \tag{15}$$

问题转化为要求这个方程的所有有上界的解.

由(15)式用归纳法易知，对任意自然数 n，有

$$f(nt)=nf(t). \tag{16}$$

根据条件

$$f(t_1)=-at_1$$

选取数 a，其中 t_1 是一固定正数，于是由(16)式得到

$$f\left(\frac{t_1}{n}\right)=\frac{f(t_1)}{n}$$

$$=-a\frac{t_1}{n}.$$

再根据(16)式，对任意自然数 m 与 n，得到

$$f\left(\frac{m}{n}t_1\right)=mf\left(\frac{t_1}{n}\right)$$

$$= -a\frac{m}{n}t_1.$$

因此，对与 t_1 可通约的所有 $t>0$，有

$$f(t) = -at. \tag{17}$$

如果对某个 $t_2>0$，使得 $f(t_2)\neq -at_2$，那么，可由条件 $f(t_2)=-bt_2$ 确定数 b. 于是用完全类似的方式将会发现，对与 t_2 可通约的所有 $t>0$，有

$$f(t) = -bt,$$

其中 $b\neq a$. 为了确定起见，设 $b>a$，如果 s 与 t_2 是可通约的，而 $s+t$ 与 t_1 是可通约的，那么

$$\begin{aligned} f(t) &= f(s+t)-f(s) = -a(s+t)+bs \\ &= (b-a)s-at. \end{aligned} \tag{18}$$

由于和一个给定数可通约的数是处处稠密的，所以在上式中，可以把 s 取得任意地大而把 $s+t$ 选取得任意靠近 s. 这时 t 很小，而(18)式给出了 $f(t)$ 的值却任意大. 这和 $f(t)$ 有上界相矛盾，这表明对函数 $f(t)$，(17)式对所有 $t>0$ 都成立. 因为 $f(t)$ 有上界且 t 可以取任意大的数，所以在(17)式中 $a\geqslant 0$[1].

当回到函数 $p(t)=e^{f(t)}$ 时，我们就得到了它的表达式(13).

---

1) 注意，当 t 在任意一个预先给定的区间上变化时，(18)式可使 $f(t)$ 取任意大的值. 因此，为了从(15)式得到(17)式，只需要求函数 $f(t)$ 在 t 变化的某个区间上有上界(这时数 a 可正可负).

参 考 文 献

要了解马尔可夫过程理论中比较经典的部分，主要可参看如下书籍：

1. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York, 1957. (中译本"概率论及其应用"，上册，胡迪鹤、林向清译，下册，刘文译，科学出版社.)

2. J. G, Kemeny and J. L. Snell, Finite Markov Chains, Van Nostrand, Princeton, 1960.

关于这理论的新进展可参看：

3. E. B. Dynkin, Theory of Markov Processes, Pergamon, New York, 1960. (中译本"马尔科夫过程论基础"，王梓坤译，科学出版社.)

4. E. B. Dynkin, Markov Processes, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

5. G. A. Hunt, "Markov processes and potentials (I—III)," *Illinois J. Math.*, 1: 44—93(1957); 1: 316—369 (1957); 2: 151—213(1958).

6. K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1967.

7. F. Spitzer, Principles of Random Walk, Van Nostrand, princeton, 1964.

8. K. Ito and H. P. McKean, Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin, 1965.(在这组文献中，[6]和本书的问题有些偏离.)

以下文献注重于某些有关的问题.

9. K. Ito, Probabilistic Processes, Nos. I and II [Russian translation], IL, Moscow, 1960 and 1963. (中译本"随机过程"，刘璋温译，上海科学技术出版社.)

10. M. M. Loève, Probability Theory, 3rd ed., Van Nostrand, Princeton, 1963. (中译本"概率论"，上册，梁文骐译，科学出版社.)

11. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, Introduction to the Theory of Random Processes, Nauka, Moscow, 1965.

下面是本书中主要引用的文献：

12. K. Ito and H. P. McKean, "Potentials and the random walk,"

Illinois J. Math., **4**: 119—132(1960).

13. E. B. Dynkin, "The optimum choice of the instant for stopping a Markov process," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **150**: 238—240 (1963).

14. W. Feller, "The birth and death processes as diffusion processes," *J. Math. Pure Appl.*, **38**: 301—345 (1959).

15. A. A. Yushkevich, "Remarks on the boundary conditions for birth and death processes," Trans. Fourth Prague Conf. Information Theory, Statistical Decision, and Random Processes, Prague (1967), pp. 381—387.

16. R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol.2: Partial Differential Equations, Wiley, New York, 1962.

17. R. S. Bucy, "Recurrent sets", *Ann. Math. Statistics*, **36**(2): 535—545 (1965).

18. M. A. Naimark, Normed Rings, Gostekhizdat, Moscow (1956).

19. G. M. Fikhtengol'ts, Course in Differential and Integral Calculus, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad (1948). (中译本"微积分学教程",杨弢亮等译,高等教育出版社.)

20. A. Cayley, "Mathematical questions and their solutions, Problem No. 4528," The Educational Times, **27**: 189 (1874).

21 A. Cayley, "Mathematical questions and their solutions, solution to Problem No. 4528," The Educational Times, **27**: 237 (1875).

22 Gusein-zade, "The sampling problem and optimal stopping rule for a sequence of independent trials," *Teoriya Veroyatnostei i Ee Primeniya*, **11**(3): 534—537(1966).

23 L. Moser, "On a problem of Cayley," *Scripta Math.*, 22: 289—292 (1956).

24. J. L. Doob, "Discrete potential theory and boundaries," *J. Math. Mech.*, **8**: 433—458 (1959).

25 P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1950. (中译本"测度论",王建华译,科学出版社.)

26 L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, Elements of Functional Analysis, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1951. (中译本"泛函数分析概要",杨从仁译,科学出版社.)

27. G. Choquet and P. A. Meyer, "Existence et unicité des representations intégrales dans les convexes compacts quelconques [Existence and uniqueness of integral representations on convex compact sets]," *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **13**: 139—154 (1963).

28. E. B. Dynkin and M. B. Malyutov, "Random walk on groups with a finite number of generators," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **137**: 1042—1045 (1961).

29. Wang Tzŭ-K'uang (王梓坤), "Classification of all birth and

death processes," Nauchnye Doklady Vysshei Shkoly, *Fiz. Mat. Nauki*, No. 4, pp. 19—25 (1958).

30. P. Levy, Processus stochastiques et mouvement Brownien [Stochastic Processes and Brownian Motion], Villars, Paris, 1948.

31. R. J. Duffin, "Discrete potential theory," *Duke Math. J.*, **20**: 233—251 (1953).

索　引

一　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

六　　画

七　　画

八　　画

九　　画